Die Geschichte

der höheren Analysis.

Von

Dr. C. I. Gerhardt.

Erste Abtheilung.

Die Entdeckung der höheren Analysis.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1855.

Die Entdeckung

der höheren Analysis.

Von

Dr. *C. I. Gerhardt*.

Mit zwei Schrifttafeln.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1855.

Durch die Bekanntmachung des Algorithmus der höheren Analysis von Seiten Leibnizens wurden die Grundlinien einer neuen Wissenschaft gezogen, welche seine grossen Zeitgenossen in kurzer Zeit auf das wunderbarste nach allen Seiten hin zu erweitern verstanden; aber er sowohl wie seine Mitarbeiter verabsäumten dem neuen Gebäude ein sicheres Fundament zu verschaffen. Denn die wenigen Worte, in welchen Leibniz zuerst über das Wesen der Differentiale sich aussprach, sind dunkle Andeutungen, die zu durchdringen nur den ausgezeichnetsten Männern seiner Zeit gelang, die aber für die minder Begabten durchaus unverständlich blieben, und was er später gelegentlich in mehreren Abhandlungen über die Auffassung und zum Verständniss der genannten Grössen hinzufügte, bot hinreichenden Stoff zu Angriffen auf die Sicherheit der neuen Rechnung. In der That eine bemerkenswerthe Erscheinung auf dem Gebiet der mathematischen Disciplinen! Die Wissenschaft wächst von Tag zu Tag auf schwankendem Grunde, und nur dadurch hat man eine sichere Gewähr für die Richtigkeit der mit ihrer Hülfe gewonnenen Resultate, dass auf eine andere unzweifelhafte Weise dieselben Resultate erhalten werden. Zwar finden sich nicht selten in den Abhandlungen Leibnizens Hinweisungen auf den Ursprung der neuen Rechnung und dass sich die Fundamentaltheoreme der höheren Analysis durch die sogenannte Exhaustionsmethode (*per inscriptiones et circumscriptiones Archimedeas*) beweisen lassen; indess geschah niemals ein Versuch, die Begründung auf diese Weise durchzuführen. Was in dieser Hinsicht Vorzügliches von Newton und seinen Nachfolgern geleistet wurde, blieb unberücksichtigt, da die Vermittelung der Lehre von den

Fluxionen mit der fast allseitig angenommenen Leibnizischen Darstellung der höheren Analysis fehlte.

Dieser Zustand dauerte länger als ein Jahrhundert. In dieser Zeit fehlte es zwar nicht an Bemühungen, der gesammten höheren Analysis ein festes Fundament zu verschaffen; die Wege jedoch, die man dazu einschlug, konnten nicht zum Ziele führen, insofern man nicht auf den Ursprung zurückging und die historische Entwickelung der Wissenschaft unbeachtet liess. Meistens betrachtete man die Differentiale den Ansichten Leibnizens gemäss als unendlichkleine Grössen, die in Bezug auf andere endliche Grössen verschwindend seien, oder da diese Vorstellung zu den schneidendsten Widersprüchen führte, als Nullen mit intensivem Werth, oder um allen Zweifeln ein Ende zu machen, als Fictionen, die auf Treu und Glauben angenommen, nur der Rechnung wegen gemacht werden müssten. Bei dem Studium der höheren Analysis verfuhr man so, wie Bossut aus seinem Leben erzählt: *Lorsque je commençais à étudier le livre du marquis de l'Hôpital, j'avais de la peine à concevoir qu'on pût négliger absolument, sans erreur quelconque, une quantité infiniment petite, en comparaison d'une quantité finie. Je confiai mon embarras à un fameux géomètre* (*Fontaine*) *qui me répondit: „Admettez les infiniment petits comme une hypothèse, étudiez la pratique du calcul, et la foi vous viendra.“ La foi est venue en effet: je me suis convaincu que la métaphysique de l'analyse infinitésimale est la même dans le fond que celle de la méthode d'exhaustion des anciens géomètres.* (*Hist. des mathématiq. Tom. II. p.* 145.) — Dies Alles wäre vermieden worden, wenn man die historische Entwickelung der höheren Analysis verfolgt hätte; man würde alsdann in den Untersuchungen der griechischen Geometer aus dem Bereich der höheren Geometrie den Grundbegriff gefunden und durch Zusammenfassen der einzelnen Fälle, in welchen derselbe erscheint, ihn so verallgemeinert haben, wie es die Begründung der höheren Analysis verlangt. Erst in neuerer Zeit haben theoretische Untersuchungen zu der Ueberzeugung geführt, dass eben dieser Begriff der Gränze das alleinige sichere Fundament für die gesammte höhere Analysis bildet; die Stimmen indess sind noch nicht zum Schweigen gebracht, welche meinen, dieser Begriff sei zu dunkel und für diejenigen, welche das Studium der höheren Mathematik beginnen, zu schwierig. Um auch diesen Vorwurf, den einzig haltbaren, der noch von den Gegnern der Gränzmethode erhoben wird, gründlich zu beseitigen, dürfte die geschichtliche Darstellung am rechten Orte sein, in der gezeigt wird, wie die höhere Analysis entstanden, auf welche Quelle sie zurückgeführt werden kann und auf welche Weise sie sich nach und nach herangebildet hat. —

Die Geschichte der Mathematik ist seit dem Anfang dieses Jahrhunderts ungebührlich vernachlässigt worden. Die Theilnahme für die historische Seite der Wissenschaft beschränkt sich auf einzelne abgerissene Notizen, die selten aus den Quellen geschöpft, in der Regel den Schriften über die Geschichte der Mathematik, welche im 18. Jahrhundert verfasst sind, entlehnt werden. Das schöne Beispiel Lagrange's, der in den *Leçons sur le calcul des fonctions* der historischen Entwickelung eine ganz besondere Aufmerksamkeit gewidmet hat und der jede Abtheilung seiner *Mécanique analytique* mit einer geschichtlichen Betrachtung über die zu Grunde gelegten Principien beginnt, ist ohne Nachahmung geblieben. Während auf fast allen Gebieten des Wissens die Anfänge, die Grundgesetze und die dadurch bedingte Entwickelung, die Störungen und die äusseren Einwirkungen wenigstens in übersichtlicher Darstellung dargelegt werden, hat man sich in der Mathematik gewöhnt, die Entstehung und die allmählige Ausbreitung der einzelnen Disciplinen ausser Acht zu lassen. Wenn nun auch zugestanden werden muss, dass alles das, was in der Mathematik zur Betrachtung kommt, lediglich durch die freie Thätigkeit des Geistes hervorgebracht wird und ohne anderweitige Hülfsmittel dargestellt werden kann, so wird auf der andern Seite nicht geläugnet werden, dass durch die genetische Entwickelung der Grundbegriffe, die in schroffster Abstraction hingestellt, der klaren Erkenntniss und Durchdringung manche Schwierigkeiten darbieten, vielleicht am leichtesten die Dunkelheiten beseitigt werden. Vornehmlich dürfte die genetische Darstellung der Principien der höheren Analysis für die deutliche Einsicht in das Wesen derselben äusserst förderlich sein. In diesem Punkte kann die Geschichte der Mathematik der Wissenschaft zu Hülfe kommen. Freilich sind die vorhandenen Schriften über die Geschichte der Mathematik meistens so abgefasst, dass sie weniger den Weg, auf dem die einzelnen Disciplinen fortgeschritten und allmählig sich herangebildet haben, im Zusammenhang dar-legen, als vielmehr über die Erscheinungen auf dem Gebiete der mathematischen Literatur berichten. Die vorliegende Schrift ist ein Versuch, diese Lücke in Bezug auf die höhere Analysis auszufüllen. — Um dieses Ziel zu erreichen, war es nothwendig, auf die Quellen selbst zurückzugehen. Dies ist mit möglichster Sorgfalt geschehen, so weit die Verhältnisse des Verfassers es gestatteten, welcher zur Zeit der Abfassung dieser Schrift selbige aus grosser Entfernung mühsam herbeischaffen musste. Der Ursprung der einzelnen Methoden ist daraus genau entnommen, sie selbst sind in ihren Eigenthümlichkeiten getreu characterisirt. Zu dem Ende sind aus den betreffenden Schriften längere Stellen ausgehoben worden und zwar in der Sprache des Originals, um die ursprüngliche Färbung, die durch Uebertragung leicht verloren geht, zu erhalten und um nicht Vorstellungen späteren Ursprungs einzumischen, wodurch das Frühere oft in wesentlich anderem Lichte erscheint. Namentlich war dies Verfahren unumgänglich nothwendig bei der Mittheilung der Leibnizischen Manuscripte, mit deren Hülfe die selbstständige Entdeckung des Algorithmus der höheren Analysis durch Leibniz festgestellt und der lange Streit über den ersten Entdecker der Differentialrechnung endlich definitiv entschieden worden ist. Hierbei kann der Verfasser nicht unterlassen, den Hohen vorgesetzten Behörden in Berlin und Hannover, besonders der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften, für die ausgezeichnete Liberalität, durch welche die Auffindung und sorgfältige Untersuchung der Leibnizischen Manuscripte auf der Königlichen Bibliothek zu Hannover ermöglicht wurde, den wärm- Dank abzustatten.

Berlin im October 1854.

Die Entdeckung

der höheren Analysis.

Der Grundbegriff der höheren Analysis bis auf Leibniz und Newton.

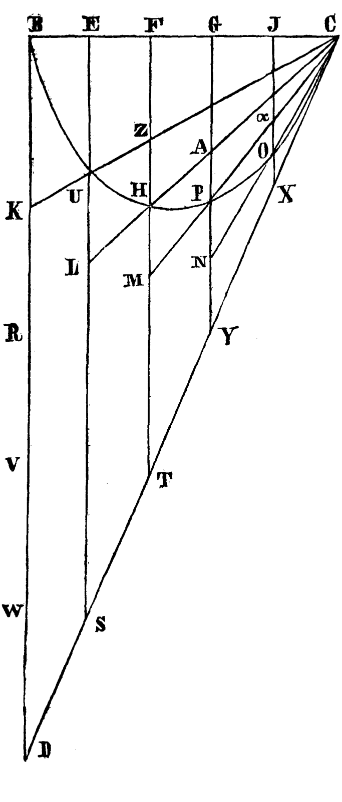
Der Ursprung der höheren Analysis lässt sich bis zu den in ihrer Art unübertroffenen Schöpfungen der Geometer des griechischen Alterthums verfolgen; sie wurzelt in dem Verfahren, das zuerst von Euklides und Archimedes zur Ermittelung der Quadratur krummlinig begränzter Figuren angewandt wurde. Dies darzuthun ist die nächste Aufgabe, und zu dem Ende ist eben jenes Verfahren der genauesten Betrachtung zu unterwerfen.

Es liegt in der Natur der Sache, dass die Geometer des Alterthums auf sehr verschiedene Weise zu den Theoremen gelangten, die wir als Erzeugnisse ihres Scharfsinnes noch immer bewundern. Sie fanden dieselben nicht allein auf dem Wege der Speculation, ihre Hülfsmittel waren nicht bloss die noch gegenwärtig üblichen: Lineal und Zirkel, sie gebrauchten auch unmittelbare Messung durch den Massstab und Abwägung körperlicher Figuren, die aus derselben Materie bestanden. Von dem letzteren findet sich in Archimed's Schrift über die Quadratur der Parabel ein Beispiel. Hatten sie so, gleichsam im Rohen, das Verhältniss von Flächenräumen oder des cubischen Inhaltes von Körpern ermittelt, so kam es darauf an, die Wahrheit solcher neu gewonnenen Ergebnisse streng mathematisch zu beweisen entweder dadurch, dass sie den Zusammenhang derselben mit den als richtig anerkannten Sätzen zeigten, oder dass sie die aus jenen gezogenen Folgerungen mit dem bisher Bewiesenen als nicht im Widerspruch stehend darlegten. Diese Art und Weise der Begründung wurde von ihnen Analysis genannt und mit bewundrungswürdiger Meisterschaft gehandhabt. In besondern Schriften, die grösstentheils verloren gegangen sind, hatten sie die Hülfssätze zusammengestellt, welche bei dergleichen Untersuchungen als Anhaltspunkte dienen konnten und durch die die Lösung der Probleme auf dem kürzesten Wege vollbracht wurde. War jedoch das Verhältniss zwischen geradlinichten und krummlinig begränzten ebenen Figuren oder zwischen Polyedern und von krummen Oberflächen eingeschlossenen Körpern genau zu ermitteln, so stellten sich grosse Schwierigkeiten entgegen, insofern die unmittelbare Anschauung, ein nothwendiges Erforderniss bei allen geometrischen Untersuchungen, nicht ausser Acht gelassen werden durfte, um Fehlschlüsse zu vermeiden. Dass diejenigen, welche hierbei nicht mit der nöthigen Vorsicht zu Werke gingen, zu dergleichen verleitet wurden, davon berichtet Archimedes in den Vorreden zu seinen Schriften. Nur die grösste Strenge in den Beweisen konnte vor irrthümlichen Resultaten bewahren; deshalb verwandten die grossen Geometer des Alterthums die vorzüglichste Sorgfalt darauf, und ihre Schriften haben zu jeder Zeit als unübertreffliche Muster in dieser Hinsicht gegolten.

Die erwähnten Schwierigkeiten zeigten sich bereits bei der Ermittelung des Verhältnisses zwischen der einfachsten krummlinig begränzten Figur, dem Kreise, und andern von geraden Linien eingeschlossenen Ebenen. Nachdem nämlich gezeigt worden, dass reguläre Polygone von gleicher Seitenzahl sich wie die Quadrate der Durchmesser der umschriebenen Kreise verhielten, so war nichts natürlicher, um den Uebergang zum Kreise selbst zu bilden, als durch Verdoppelung der Seitenzahl der Polygone die Umfänge derselben der Kreisperipherie immer mehr zu nähern. Da aber eine ins Unendliche fortgesetzte Verdoppelung der Seitenzahl und zugleich die unbegränzte Annäherung des Umfangs der Polygone an die Kreisperipherie keine Anschauung gestattet, so sahen sich die Geometer des Alterthums genöthigt, für alle derartige Untersuchungen einen Hülfssatz zu Grunde zu legen, durch dessen Vermittelung jenes Ziel unbeschadet der höchsten Evidenz erreicht wurde. Ein solcher Satz findet sich zuerst in den Elementen Euklid's (10. Buch, 1): Sind zwei ungleiche Grössen gegeben, und nimmt man von der grösseren mehr als die Hälfte, von dem Reste wieder mehr als die Hälfte, und so immer fort, so kommt man irgend einmal auf einen Rest, welcher kleiner ist, als die gegebene kleinere Grösse. Demnach bleibt bei fortgesetzter Theilung der einen Grösse der letzte Rest stets mit der zweiten kleineren vergleichbar, und es geschieht somit der strengen Anforderung der Geometrie Genüge. — In der Anwendung dieses Satzes verfährt Euklides sehr gleichförmig. Um z. B. zu zeigen, dass jeder Kegel der dritte Theil eines Cylinders ist, welcher mit ihm gleiche Höhe und einerlei Grundfläche hat, nimmt er im Voraus an, dass das, was behauptet wird, richtig sei, und führt den Beweis indirect. Angenommen also, dass der Cylinder grösser sei, als das Dreifache des Kegels, denkt er sich in dem Kreise, der die gemeinsame Grundfläche des Cylinders und des Kegels ist, ein Quadrat beschrieben und auf denselben ein mit dem Cylinder gleich hohes Prisma gestellt, so ist das letztere grösser als die Hälfte des Cylinders. Halbirt man nun die zu den Quadratseiten gehörigen Kreisbogen und verbindet die Theilpunkte mit den zunächst liegenden Ecken des Quadrats, so ist jedes der dadurch entstandenen Dreiecke grösser als die Hälfte des zugehörigen Kreisabschnitts; stellt man also auf jedes dieser Dreiecke ein mit dem Cylinder gleich hohes Prisma, so ist jedes derselben grösser als die Hälfte des zugehörigen Cylinderabschnitts. Setzt man die Halbirung der Kreisbogen so fort und verfährt wie vorher, so kommt man einmal auf Cylinderabschnitte, die kleiner sind als der Ueberschuss des Cylinders über das Dreifache des Kegels; mithin wird das Prisma von gleicher Höhe mit dem Cylinder, das auf dem in der Grundfläche beschriebenen Polygon steht, grösser sein als das Dreifache des Kegels. Nun ist dieses Prisma das Dreifache einer Pyramide, die einerlei Grundfläche und Spitze mit dem Kegel hat; folglich wird diese Pyramide grösser sein als der auf dem Kreise errichtete Kegel, was offenbar einen Widerspruch enthält, da die Pyramide in dem Kegel enthalten ist. Mithin kann der Cylinder nicht grösser sein, als das Dreifache des Kegels. Ebenso wird gezeigt, dass der Cylinder nicht kleiner sein könne, als das Dreifache des Kegels. Die Richtigkeit des Satzes wird demnach dargethan sein. Auf dieselbe Weise bemerkt Euklides, dass Kreise sich verhalten, wie die Quadrate ihrer Durchmesser, dass dreiseitige Pyramiden, Kegel, Cylinder von gleicher Höhe beziehungsweise sich verhalten wie ihre Grundflächen, dass Kugeln im dreifachen Verhältniss ihrer Durchmesser stehen.

Die Hauptquelle, um das Verfahren kennen zu lernen, dessen sich die Geometer des Alterthums in ihren Untersuchungen über die Quadratur krummlinig begränzter Ebenen und über Cubirung der von krummen Oberflächen eingeschlossenen Körper bedienten, sind die noch vorhandenen Schriften Archimed's. Unter diesen dürfte die Abhandlung über die Quadratur der Parabel besonders in Betracht zu ziehen sein, insofern in derselben das in Rede stehende Verfahren am ursprünglichsten sich zeigt und zugleich erhellt, dass Archimedes mit weit grösserer Schärfe, als seine Vorgänger verfuhr. Zuerst muss hervorgehoben werden, dass Archimedes in dieser Abhandlung, so wie in allen übrigen, den oben erwähnten Hülfssatz Euklid's in veränderter Form zu Grunde legt; er drückt ihn so aus: Wenn zwei Flächenräume ungleich sind, so ist es möglich, den Unterschied, um welchen der kleinere von dem grösseren übertroffen wird, so oft zu sich selbst zu setzen, dass dadurch jeder gegebene endliche Flächenraum übertroffen wird. Vielleicht war man in der Anwendung des Euklideischen Grundsatzes nicht vorsichtig genug gewesen, zumal bei der beliebig fortgesetzten Halbirung die Evidenz leicht verloren gehen konnte, und hatte, wie Archimedes in der der Abhandlung über die Quadratur der Parabel vorausgeschickten Zuschrift an den Dositheus ausdrücklich berichtet, falsche Resultate erhalten. — Archimedes hat, wie bekannt, die Quadratur der Parabel auf doppelte Weise dargethan, zuerst mit Hülfe der Lehre vom Gleichgewicht — vielleicht war er ursprünglich durch mechanisches Abwägen darauf gekommen — und sodann auf rein geometrischem Wege. Im erstern Falle verfährt er auf folgende Weise: Er construirt auf der Sehne *BC* (Fig. 1), die den parabolischen Abschnitt abschneidet, ein Dreieck *BCD*, indem er durch den Endpunkt *B*

Fig. 1.



der Sehne eine Parallele *BD* mit der Axe zieht, in dem andern Endpunkte *C* eine Tangente *CD* an die Parabel legt und beide Linien bis zum gegenseitigen Durchschnitt in *D* verlängert; alsdann theilt er die Sehne in eine beliebige Anzahl gleicher Theile *BE, EF, FG, GJ, JC,* zieht durch die Theilpunkte *E, F, G, J* Parallelen mit der Axe *ES, FG, GY, JX,* welche die Parabel in den Punkten *U, H, P, O* schneiden, und legt durch diese Punkte die Linien *CUK, CHL, CPM, CON.* Dadurch werden zwei Reihen von Trapezen erhalten, welche den parabolischen Abschnitt von innen und von aussen einschliessen. Archimedes beweist nun zunächst mittelst statischer Gesetze, dass das Dreieck *BCD* kleiner sei, als die dreifache Summe der Trapeze *KE, LF, MG, NJ* und des Dreiecks *XJC,* grösser aber als die dreifache Summe der Trapeze *FU, GH, JP* und des Dreiecks *CJO;* und sodann mit Hülfe des oben angeführten Grundsatzes, dass wenn ein Flächenraum *Q* den dritten Theil des Dreieckes *BCD* beträgt, der parabolische Abschnitt *BHC* diesem Flächenraum *Q* gleich ist. Denn angenommen, er sei grösser als der Flächenraum *Q,* so wird der Ueberschuss des parabolischen Abschnitts über diesen Flächenraum gewisse Male zu sich selbst gethan mehr geben als das Dreieck *BCD.* Nun ist es aber möglich, einen noch kleineren Flächenraum, als jenen Ueberschuss, anzunehmen, welcher ein gewissemaliger Theil des Dreiecks *BCD* ist. So sei denn das Dreieck *BCK* kleiner, als der erwähnte Ueberschuss und sei ein gewissemaliger Theil des Dreiecks *BCD*; dann wird *BK* ein ebensovielmaliger Theil von *BD* sein. Man theile also *BD* durch die Punkte *R, V, W* in solche Theile, ziehe von diesen Punkten gerade Verbindungslinien nach *C* und lege durch die Durchschnittspunkte dieser Linien mit der Parabel die geraden Linien *ES, FT, GY, JX* parallel der Axe. Nun ist $Q + \Delta\, BCK <$ Abschnitt *BHC,* aber $\Delta\, BCK = EK + ZL + AM + \alpha N + \Delta\, COX$, folglich $Q < FU + GH + JP + \Delta\, CJO$. Es ist aber $\Delta\, BCD = 3\, Q$, mithin müsste $\Delta\, BCD < 3\ (FU + GH + JP + \Delta\, CJO)$ sein, welches unmöglich ist, da gezeigt worden, das Dreieck sei grösser als jene dreifache Summe; folglich ist der parabolische Abschnitt *BHC* nicht grösser als *Q.* Auf gleiche Weise wird ferner gezeigt, dass auch der parabolische Abschnitt *BHC* nicht kleiner sein könne, als der Flächenraum *Q.* Mithin ist Abschnitt $BHC = Q$. Nun erst folgt der Hauptlehrsatz, dass jeder parabolische Abschnitt vier Dritttheile eines Dreiecks auf derselben Grundlinie und von gleicher Höhe beträgt. — In der Quadratur der Parabel auf rein geometrische Weise verfolgt Archimedes einen directeren Weg. Er zeigt zuerst, dass das Dreieck, welches in einen parabolischen Abschnitt eingeschrieben wird und mit demselben einerlei Grundlinie und Höhe hat, grösser als die Hälfte des Abschnitts ist. Hieraus folgert er, dass es möglich sei, in einen parabolischen Abschnitt ein Vieleck dergestalt einzuschreiben, dass die Summe der übrigbleibenden Abschnitte kleiner ist, als jeder angebbare Flächenraum, was Euklides als Grundsatz angenommen hatte. Nachdem Archimedes ferner noch dargethan, dass wenn in einen parabolischen Abschnitt ein Dreieck von derselben Grundlinie und Höhe mit dem Abschnitt eingeschrieben wird, und wenn in die übrigbleibenden Abschnitte ebenfalls Dreiecke von einerlei Grundlinie und Höhe mit diesen eingeschrieben werden, jedes der beiden zuletzt eingeschriebenen Dreiecke dem achten Theil des in dem ganzen Abschnitt eingeschriebenen Dreiecks gleich ist, und dass die Summe aller dieser Dreiecke zusammen kleiner ist, als der gegebene Abschnitt, so beweist er allgemein, dass die Summe einer geometrischen Progression von einer beliebigen Menge von Grössen in dem Verhältniss von $4:1$, sammt dem dritten Theil der keinsten, vier Dritttheile der grössten beträgt. Durch diese Vorbereitungen gelangt Archimedes schliesslich zu dem Satz, dass jeder parabolische Abschnitt vier Dritttheilen eines Dreiecks gleich ist, das einerlei Grundlinie und Höhe mit dem Abschnitt hat. — Betrachten wir noch einmal die beiden Wege, auf welchen Archimedes die Quadratur der Parabel ermittelt, so ergiebt sich, dass er in dem ersten Falle zwei Reihen von Grössen (die in- und umschriebenen Trapeze sammt den Dreiecken) aufstellt, deren Summen sowohl dem parabolischen Abschnitt als dem Dritttheil des um denselben beschriebenen Dreiecks als Gränzen sich nähern; in dem zweiten Falle bilden sämmtliche in dem parabolischen Abschnitt nach und nach eingeschriebenen Dreiecke ein Polygon, dessen Umfang der parabolischen Curve so nahe gebracht werden kann, dass die Summe aller übrigbleibenden Abschnitte kleiner ist, als jeder angebbare Flächenraum d. h. dass der parabolische Abschnitt die Gränze der Summe aller der eingeschriebenen Dreiecke bildet. Demnach sind beide Weisen, durch welche Archimedes dasselbe Ziel erreicht, nur äusserlich verschieden, dagegen liegt beiden das Gemeinsame zu Grunde, dass die zu bestimmende krummlinig begränzte Ebene als die Gränze einer Reihe von irgend welchen Grössen betrachtet wird, die zu ihr in einer gewissen Beziehung stehen. Zugleich bietet die doppelte Behandlung der Quadratur der Parabel zu der weitern Bemerkung Veranlassung, dass wie überhaupt sich über die Lösung geometrischer Probleme keine allgemeinen Regeln aufstellen lassen, die Geometer des Alterthums auch für die Ermittelung der Quadraturen und Cubaturen keine durchgreifenden Normen zu schaffen vermochten, denn nach welchem Gesetz jene Reihen fortschreiten und von welcher Form die Grössen, welche die Glieder derselben bilden, sein müssten, darüber konnten bei der Vielgestaltung räumlicher Grössen ebensowenig allgemeine Bestimmungen gegeben werden, als darüber, auf welchem Wege durch selbige Reihen zur Ermittelung einer gegebenen geometrischen Grösse zu gelangen sei. Daher wird denn auch in Archimed's Schriften ein allgemeines, auf alle Fälle anwendbares Verfahren, d. h. eine Methode zur Bestimmung der Gränze einer Summe von einer willkürlichen Anzahl Grössen nicht gefunden. Hinreichende Beweise hierzu liefern die beiden Bücher über Kugel und Cylinder, die Abhandlung über Konoiden und Sphäroiden, so wie die über die Spirallinie.

Man hat das in Rede stehende Verfahren der Geometer des Alterthums zur Ermittelung der Quadraturen und Cubaturen „Exhaustionsmethode“ genannt; aus dem Vorhergehenden erhellt indess deutlich, dass in dergleichen Untersuchungen eine Methode, d. h. ein allgemein gültiges Verfahren nach einer bestimmten Norm nicht vorhanden ist. Die Geometer des Alterthums haben aber in diesen Untersuchungen den Begriff der Gränze, wenn auch nur in einem beschränkten Sinne, auf die ihnen eigenthümliche strenge Weise festgestellt. Dadurch dass sie den rein geometrischen Weg festhielten und zugleich die Nothwendigkeit erkannten, dem Haupterforderniss der Geometrie, der Evidenz in den Beweisen, Genüge leisten zu müssen, um sichere Resultate zu erhalten — dadurch wurden sie zu der Annahme geführt, jede krummlinig begränzte Ebene als die Gränze eines darin beschriebenen Polygons zu betrachten, indem die Summe aller übrigbleibenden Abschnitte kleiner werde als jeder angebbare Flächenraum.

Von den Geometern des Alterthums ist hier allein noch **Pappus** (gegen Ende des 4. Jahrh. nach Chr.) zu erwähnen; er hat in seinen Mathematischen Sammlungen die Entdeckungen älterer Mathematiker und den Inhalt ihrer damals noch vorhandenen Schriften aufbewahrt und so uns kostbare Ueberreste aus dem blühendsten Zeitalter der griechischen Mathematiker gerettet. Pappus begnügte sich jedoch nicht, das Zerstreute lediglich zusammenzustellen; er zeichnete sich vielmehr unter dem grossen Haufen der Compilatoren seiner Zeit rühmlichst aus und tritt dadurch den grossen Geometern früherer Zeiten zur Seite, dass er überall den bereits bekannten Problemen neue Sätze hinzufügt oder sie über ihre bisherigen Gränzen erweitert. Bei der Betrachtung der Spirale des Konon, deren Eigenschaften Archimedes untersucht hatte, kommt Pappus auf die Spirale, welche während der Umdrehung eines Kugelquadranten um seine Axe ein vom Endpunkte dieser Axe mit gleichförmiger Geschwindigkeit herabrollender Punkt auf der Kugeloberfläche beschreibt, und findet, dass die Kugeloberfläche zwischen dieser Spirale und der Basis des Kugelquadranten d. h. des grössten Kreises, welcher den Quadranten abschneidet, dem Quadrate des Durchmessers der Kugel gleich ist. In der Begründung dieses Theorems folgt Pappus zwar dem von Euklides und Archimedes eingeschlagenen Wege, indem er das von der beschriebenen Spirale und der Basis des Kugelquadranten eingeschlossene Stück der Kugeloberfläche als Gränze zweier in- und umschriebenen Figuren betrachtet, indess mangelt sichtlich die Schärfe in der Beweisführung, durch die Archimedes seinen Untersuchungen über Quadraturen und Cubaturen die höchste Evidenz verlieh. Wie sehr in dieser Hinsicht Pappus hinter dem grossen Geometer des Alterthums zurücksteht, dürfte am deutlichsten sich ergeben, wenn man den Archimedeischen Beweis des Satzes, dass die Kugel ebenso gross ist als ein Kegel, dessen Grundfläche der Oberfläche und dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist (Von der Kugel und Cylinder, I. 38) mit dem vergleicht, wie er von Pappus (*Collect. math. lib. V. prop. XXXIII.*) geführt wird. Leider ist die einzige vorhandene Ausgabe der Mathematischen Sammlungen des Pappus, die lateinische Uebersetzung **Commandin's**, in solchem Zustande, dass eine Vergleichung fast unmöglich wird.

Nach Pappus wird kein Geometer des Alterthums gefunden, der etwas dem Vorhergehenden Aehnliches geleistet hätte. In der berühmten Schule zu Alexandrien trat immer mehr an die Stelle der Originalität ausgebreitetes Wissen; die Gelehrten waren lediglich Commentatoren der Werke des classischen Alterthums. Der entartete griechische Volksstamm konnte nicht länger der Träger wissenschaftlicher Bildung bleiben. Durch die Vermittelung gelehrter syrischer Christen, besonders der Nestorianer, wurden die Beherrscher des grossen arabischen Reiches aus dem Stamme der Abassiden zu Bagdad für griechische Bildung und Wissenschaft gewonnen, und mit demselben Eifer, mit welchem ihre Vorgänger voll Fanatismus für ihren Glauben die Ueberreste aller fremden Bildung zu vernichten drohten, erwarben sie sich als Beschützer und Pfleger der Wissenschaften, besonders der mathematischen, unvergänglichen Ruhm. Die ungeheure Ausdehnung ihres Reiches, das bis über den Indus sich erstreckte, ihre gewaltige Macht öffnete die bisher verschlossenen Pforten zu den Culturländern Indiens, und die Araber vermochten auf Grund der bereits aufgenommenen griechischen Bildung die selbstständigen Leistungen der Inder in den mathematischen Disciplinen zu erkennen, ihre Vorzüge zu würdigen und sich anzueignen.*)

Bisher sind die Araber vorzugsweise als Bewahrer und Vermittler der griechischen und indischen Mathematik gefeiert worden, ihre eigenen Leistungen, namentlich in der Geometrie, hat man ziemlich gering angeschlagen. Dies Urtheil gründet sich indess nur auf das Wenige, was aus der mathematischen Literatur der Araber durch den Druck veröffentlicht ist: Uebersetzungen griechischer Mathematiker und ein paar Werke, die nach indischen Vorbildern gearbeitet sind, während die reichen Schätze arabischer Handschriften, die in den grossen Bibliotheken Europa's sich aufgehäuft finden, mit Rücksicht auf Mathematik bisher nur sehr oberflächlich untersucht sind. Erst in neuerer Zeit ist durch die Bemühungen Sédillot's**) und Woepcke's***) einiges Licht über

*) Siehe Beilage I.

) *Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux par Sédillot.* **Paris 1845. 1849.

***) *L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî, publiée, traduite et accompagnée* die Geometrie der Araber verbreitet worden; aber schon aus den nicht sehr umfangreichen Bruchstücken, welche die eben Genannten mittheilen, erhellt unwiderleglich, dass die arabischen Geometer nicht blos die Meisterwerke der Griechen übersetzten und commentirten, sondern auch unvollkommen gelöste Probleme zu vervollständigen und die von jenen angefangenen Untersuchungen fortzuführen vermochten. Ob die arabischen Geometer auch hinsichtlich der Quadraturen und Cubaturen den Schöpfungen der Griechen etwas Neues hinzugefügt haben, lässt sich vor der Hand noch nicht entscheiden; dass jedoch die Lehre von den Gränzen ihrer Aufmerksamkeit nicht entging, davon giebt der Titel einer Schrift des arabischen Mathematikers Ibn Alhaïtham: Ueber den ersten Satz des 10. Buches der Elemente Euklid's (*Woepcke l. c.* S. 75) Kunde.

Als Europa aus der tiefen Barbarei des Mittelalters sich zu erheben begann, fanden bei den Abendländern zunächst diejenigen mathematischen Disciplinen Berücksichtigung, die von den Arabern vorzugsweise cultivirt worden waren: Arithmetik und Astronomie, die erstere für den Handel, die zweite zur Regulirung des Jahres und zur Bestimmung der kirchlichen Feste unentbehrlich. Namentlich aber waren es die sogenannten geheimen Wissenschaften, Alchemie und Astrologie, von den Arabern ebenfalls besonders gepflegt, welche mit unwiderstehlichem Reiz alle diejenigen anzogen, die sich irgend für Gelehrsamkeit interessirten. Dies beweist, in wie grosser Kindheit der Culturzustand der christlichen Völker zur damaligen Zeit sich befand; auf solchem Boden konnte die Geometrie Archimed's noch nicht gedeihen. Daher werden auch nur einzelne Namen genannt, wie Platon von Tivoli (in der ersten Hälfte des 12. Jahrh.) und Gerard von Cremona (1114 bis 1187) die ein Interesse für das Studium der Geometrie des Alterthums beseelte; sie haben zum Theil mit Hülfe gelehrter Juden höchst mangelhafte Uebersetzungen griechischer Mathematiker aus dem Arabischen geliefert. Erst als mit Einbruch der türkischen Horden in Europa die gelehrten Grie-

d'extraits de manuscrits inédits par F. Woepcke. Paris 1851. — *Extrait du Fakhrî, traité d'algèbre par Aboù Bekr Mohammed ben Alhaçan Alkarkhî par F. Woepcke. Paris* 1853.

chen eine Zufluchtsstätte im westlichen Europa suchten und zugleich die Kenntniss der griechischen Sprache verbreiteten, wurde die Aufmerksamkeit der Abendländer auf die Meisterwerke ihrer Literatur gelenkt und es begann das Studium der Geometer des griechischen Alterthums unmittelbar aus den Quellen. Der Deutsche Johannes Müller (1436 bis 1476), von seinem Geburtsort Königsberg in Franken gewöhnlich Regiomontanus genannt, Maurolykus aus Messina (1494 bis 1575), Commandinus aus Urbino (1509 bis 1575) entwickelten als Uebersetzer und Commentatoren grosse Thätigkeit. Die vorhandenen Uebersetzungen, aus dem Arabischen veranstaltet, waren fehlerhaft und vielfach unverständlich; dadurch dass man diese Mängel zu beseitigen sich bemühte, dass vor allen Dingen die Wiederherstellung eines richtigen Textes versucht wurde, dadurch gewöhnte man sich allmählig an die strenge Methode der Geometer des Alterthums. Vorzugsweise waren es die Schriften Archimed's, die mit besonderer Vorliebe studirt wurden. Die Untersuchungen, welche der grosse Geometer des Alterthums über die Schwerpunkte von Ebenen angestellt hatte, reizten zur Nachahmung und Fortsetzung. Commandinus versuchte die Schwerpunkte der Körper zu bestimmen*); jedoch mit Ausnahme der Körper, bei welchen diese Untersuchung keine Schwierigkeit verursacht, gelang ihm nur die Ermittelung des Schwerpunktes für das parabolische Konoid und die Halbkugel. Glücklicher war Lucas Valerius (Professor der Mathematik zu Rom um das Ende des 16. Jahrh.): er veröffentlichte in dem Werke: *De centro gravitatis solidorum libri tres*, *Rom.* 1604, die Ergebnisse seiner Forschungen über die Schwerpunkte aller sphärischen und konischen Körper. — Bei diesen ersten Versuchen, selbstständig auf dem Gebiet der Geometrie etwas zu leisten, verfolgten die Mathematiker der neueren Zeit denselben Weg, der in ähnlichen Fällen von den Geometern des Alterthums eingeschlagen worden war. Jedoch das Studium der

*) Seine Schrift: *Liber de centro gravitatis solidorum*, ist dem Werke: *Archimedis de iis quae vehuntur in aqua*, *libri duo a F. Commandino restituti*, *Bonon.* 1565, angehängt. Eine vollständige Inhaltsanzeige dieser Schrift Commandin's findet sich in Kästner's Geschichte der Mathematik B. 2. S. 203—211.

Meisterwerke Archimed's und besonders das tiefe Eindringen in das Wesen seines Verfahrens, dessen er sich in seinen Untersuchungen über die Eigenschaften der krummlinig begränzten Ebenen und der von krummen Oberflächen eingeschlossenen Körper bedient hatte, erforderten eine sehr allgemeine Bildung des Geistes; eine solche war damals nach so langer Reihe von Jahrhunderten tiefer Barbarei noch nicht erreicht, und daher kam es, dass die genannten Geometer die unübertreffliche Schärfe Archimed's in geometrischen Untersuchungen sich nicht zu eigen machen konnten.*) Sie berücksichtigten ausschliesslich die äussere Form des Archimedeischen Verfahrens und nahmen sich das leichtere Euklideische zum Muster. Lucas Valerius spricht es offen aus in der Vorrede zum ersten Buche seines oben angeführten Werkes: *Quod autem aliquot propositiones, alias Archimedis lemmaticas, alias Commandini meis rationibus attuli demonstratas, non tam idcirco id feci, ne meae lucubrationes deperirent, quam quod vel stylo Euclidis magis consonae, vel ad percipiendum eo non minus laboriosae, quo ad inveniendum sunt difficiliores, vel meo proposito aptiores viderentur.* So wurde denn das geniale Verfahren Archimed's unter den Händen der Mathematiker des 16. Jahrh. wirklich zu einer Methode und mit dem Namen „Exhaustionsmethode“ belegt. Unbekümmert um einleitende und vorbereitende Sätze, in denen der wahre Nerv der Archimedeischen Strenge gefunden wird, und ohne die scharfen indirecten Beweise umschloss man jede krummlinichte Ebene und jeden von krummen Oberflächen eingeschlossenen Körper sogleich durch Polygone und Polyeder und behauptete dem oben angeführten Euklideischen Grundsatze gemäss, dass die gegebene Figur von den umschriebenen bei Vermehrung ihrer Seiten oder Seitenebenen ins Unendliche sich um eine kleinere Grösse, als irgend eine angebbare, unterscheide, die deshalb zu vernachlässigen sei. Auf diese Weise verschwand die strenge geometrische Evidenz, welche Archimedes in seinen Untersuchungen so geschickt aufrecht erhalten hatte, und an ihre

---

*) Beläge hierzu bietet namentlich die genannte Schrift des Lucas Valerius; grosse Schlaffheit in der Beweisführung findet sich darin überall. Als Anhang ist derselben Schrift eine Quadratur der Parabel hinzugefügt, die gründlicher und einfacher sein soll, als die Archimedeische.

Stelle trat, wenn auch noch verhüllt, die vage Vorstellung des Unendlichkleinen.

In Folge eines Zwistes mit einem Weinhändler über den Inhalt einiger Fässer Wein hatte Keppler (1561 bis 1631) auf kurze Zeit seine tiefen Forschungen auf dem Gebiet der Astronomie verlassen, um das Maass körperlicher Räume zu studiren und das Visiren der Fässer auf bestimmte, der Theorie entlehnte Regeln zurückzuführen. Die Ergebnisse seiner Untersuchungen veröffentlichte er in dem Werke: *Nova stereometria doliorum vinariorum etc. Linc.* 1605 *), in welchem in beschränkter Sphäre derselbe reich phantastische Geist des Verfassers, wie in den Speculationen über das Weltgebäude sich offenbart. — In Bezug auf die Weinfässer, die aus Stücken von Kugeln und Cylindern zusammengesetzt sind, schickt Keppler in dem genannten Werke das voraus, was über diese Körper in den Schriften Archimed's sich vorfindet (*Stereometria Archimedea*), jedoch so aufgefasst, wie es ihm für den praktischen Zweck der Schrift und für Liebhaber der Geometrie passend schien, und verweist diejenigen, welche sich für die vollkommen strengen Beweise interessiren, auf die Quellen selbst. **) Demnach giebt er die Archimedeischen Beweise nur ihrem Sinne nach (*mihi sensus hic esse videtur, Stereomet. Archimed. theor. II.*) und eilt umbekümmert um die strenge mathematische Methode auf dem kürzesten Wege zum Ziele. So betrachtet Keppler geradezu (*theor. II.*), um das Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser zu finden, den Umfang des Kreises aus unendlich vielen Punkten zusammengesetzt, von denen ein jeder die Basis eines Dreiecks bildet, deren Spitzen im Mittelpunkte zusammentreffen; und ebenso denkt er sich später (*theor. XI.*) die Kugel aus unendlich

---

*) Ueber die deutsche Ausgabe dieser Schrift vergl. Kästner's Geschichte der Mathematik Bd. 3. S. 318 ff.

**) *Cum igitur dolia vinaria Circulo, Cono et Cylindro, figuris regularibus participent, apta sunt hactenus ad Geometricas dimensiones: quarum principia operae pretium est in vestibulo hujus speculationis collocare, ut illa ab Archimede sunt investigata, quantum quidem hujus ad oblectationem animi Geometriam amantis sufficiet: absolutae enim et omnibus numeris perfectae demonstrationes petendae sunt ex ipsis libellis Archimedeis, si quis a spinosa lectione eorum non abhorruerit.*

vielen kleinen Kegeln zusammengesetzt. Ausserdem bediente sich Keppler noch gewisser Analogien, die nur bei seinem feinen Gefühle für das Richtige zu wahren Resultaten führen konnten, z. B. *theor. III*, wo der Cylinder mit dem darum beschriebenen Parallelepipedon verglichen wird: *cylinder et columna aequealta sunt hic veluti quaedam plana corporata; accidunt igitur illis eadem, quae planis etc.*; ferner *theor. XVI: conus est sic veluti circulus corporatus; idem igitur a sectione patitur, quod circulus suae baseos; theor. XVII: cylinder est hic veluti circulus aut ellipsis corporata, quare hic idem illi accidit, quod figuris hisce in basi, in sectione eadem. Nam cylinder rectus, sectus plano ad axem recto, est veluti linea corporata et quidem cylindrico corpore praedita, quare accidit illi idem, quod lineae.* — Da jedoch in der Regel die Weinfässer von anderer Form sind, als oben erwähnt ist, so fügte Keppler, um diese Speculation nicht unvollständig zu lassen, der *Stereometria Archimedea* ein *Supplementum* hinzu, in dem er zum Behuf der Inhaltsbestimmung aller Arten Fässer die Verhältnisse 87 neuer Körper*) untersuchte, die er durch Bewegung sphärischer und konischer Flächen um Durchmesser, Axen, Ordinaten u. s. w. entstehen liess. Wiewohl die Lösung der meisten dieser Probleme bei dem damaligen Zustande der Geometrie unmöglich war und Keppler selbst nur die leichtesten zu behandeln vermochte, so wollte er doch nicht blos diese Probleme vorgelegt haben, sondern auch neue Gesichtspunkte aufstellen, durch welche ihre Lösung vielleicht einst möglich würde. Hier war nun seiner reichen Phantasie ein weites Feld eröffnet, nach allen Seiten hin kühne Gedankenblitze auszusenden, und in der That sind in diesem *Supplementum* und in dem darauf folgenden zweiten Theil des gesammten Werkes: *Stereometria dolii Austriaci in specie*, alle die Ideen ausgestreut, welche bis zur Entdeckung der höheren Analysis für die Mathematiker bei der Betrachtung der Probleme aus dem höhern Theile der Geometrie die Richtschnur bildeten. Nicht allein finden sich solche Bemerkungen, aus denen nach der Meinung Guldin's Cavaleri seine *Methodus indivisibilium* sich gebildet haben soll (*theor. XX: secetur area lineis parallelis alicui in aliquot*

*) Diese 87 neuen Körperformen belegte Keppler grösstentheils mit Namen von Früchten, mit denen sie Aehnlichkeit hatten.

segmenta aequealta minima quasi linearia), sondern auch die Grundzüge der Methode, die von den französischen Mathematikern der folgenden Zeit, Descartes, Fermat, Roberval und ihren Schülern in der Behandlung von Quadraturen und Cubaturen und namentlich in dem berühmten Tangentenproblem zur Anwendung gebracht wurden (*theor. XX: cum igitur figura circa lineam circumagitur, nihil fere creat areolae, quia minimum moveatur; theor. XXI: segmentum areolae fere nihil creat, quia pene nihil moveatur; theor. XXVII: In iis articulis, in quibus a minori ad maximum iterumque ad minus fit mutatio, lege aliqua circuli, semper est aliquousque insensibilis illa differentia*). — Wie Keppler überhaupt in der Behandlung der Probleme verfuhr, wird durch nähere Betrachtung des folgenden Theorems am anschaulichsten erläutert werden:

Theor. XXV. Segmentum Globi ad Citrium (citronenförmiger Körper) *eodem segmento circuli descriptum, videtur eam habere proportionem, quam habet semidiametur basis segmenti, ad axem seu altitudinem segmenti.*

Demonstrationem legitimam quaerant alii: Ego quod non possum apodidictice, comprobabo dictice, quatuor usus documentis. Primum est ab Analogia. Quod enim in dimidio globo, velut in maximo segmento, quod est principium segmentorum, verum est, ut et in dimidio Sphaeroide; quod item in minimo segmento, et veluti in ultimo omnium segmentorum termino, id videtur etiam in segmentis intermediis locum habere. At in dimidio globo res ita habet: quemadmodum enim latera circa rectum angulum quadrantis habent inter se proportionem aequalitatis, sic etiam quod creatur, quadrante circa perpendiculum voluto, aequale est ei, quod creatur, eodem quadrante circa basin voluto. In minimis vero similiter locum habet ista proportio: quia quo minus globi segmentum, et Citrium in eo, hoc minus ab hisce differunt Coni, figuris ipsis inscripti: Conorum vero istorum est dicta proportio: quare et circumscriptorum solidorum. Etsi fateor, ab eo quod est absolute minimum, ad id quod minimo proximum, non ubique tutam esse collectionem.

Das hier besprochene Werk Kepplers, das gegenwärtig denen gegenüber wenig beachtet wird, in welchen er die ewigen Gesetze des Weltalls bekannt machte, war für die Förderung der Wissenschaft von der höchsten Wichtigkeit. Da die darin niedergelegten Probleme die Aufmerksamkeit der Geometer der damaligen Zeit auf sich zogen, so konnte nicht fehlen, dass auch die Ideen Kepplers über die Behandlung derselben in der Wissenschaft Eingang fanden. Seit Keppler ist die Vorstellung des Unendlichkleinen, mit den strengen Forderungen der Mathematik durchaus unvereinbar, unverhüllt in die Wissenschaft aufgenommen worden; sie hat die Entdeckungen der höheren Analysis mächtig gefördert und die Anwendung und Ausbildung derselben ungemein erleichtert. Es ist ferner nicht zu verkennen, dass dergleichen Betrachtungen, die Keppler in Bezug auf die Durchschnittscurven seiner Körper gebrauchte, wie: *Decrementa perpendicularium sunt maxima apud A, minora igitur erunt apud P*; ferner: *Ubi decrementa altitudinum praecipitantur per omnes proportiones, in infinitum crescentibus proportionum augmentis, ibi incrementa quadratorum magis magisque minuntur et incrementa proportionum decrescunt*, auf die grosse durch Vieta und Descartes bewirkte Revolution in der Geometrie der Curven von bedeutendem Einfluss gewesen ist.

Diese neuen Betrachtungsweisen Kepplers, der unmittelbare Gebrauch des Unendlichkleinen, sollten jedoch in der Behandlung der mathematischen Probleme noch nicht sogleich zur Anwendung kommen; vielmehr fand ein anderes neues, allgemein anwendbares Verfahren, das ebenfalls zum Ersatz der strengen Archimedeischen Weise bestimmt war, den grössten Beifall der Mathematiker. Es ist dies die ***Methodus indivisibilium*** Cavaleri's (1598 bis 1647), die dieser früher gefunden zu haben behauptet, ehe er von dem Inhalt der *Stereometria doliorum* Kenntniss hatte.*) Cavaleri veröffentlichte sein Verfahren in dem Werke: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota. Bonon.* 1635; er liess demselben im Jahre 1647 ein anderes: *Exercitationes geometricae sex*, folgen, in welchem er seine Methode klarer darzustellen und gegen Einwürfe zu vertheidigen sich bemühte. In der Vorrede zu dem ersteren verbreitet sich Cavaleri über die Erfindung und das Wesen seiner Methode sehr ausführlich: *Cum solidorum, quae ex revolutione circa axim oriuntur, genesim aliquando meditarer, rationemque gignen-*

---

*) *Cum jam*, sagt Cavaleri in der Vorrede seines Werkes, *expositam metiendarum figurarum novam ac, si dicere fas sit, valde compendiosam methodum adinvenissem, feliciter mecum actum esse existimavi, ut haec solida* (die von Keppler aufgestellten neuen Körper) *praeter illa Archimedea, mihi suppeditarentur, circa quae illius vim et energiam experiri liceret.*

tium planarum figurarum cum genitis solidis compararem, maxime sane admirabar quod a propriorum parentum conditione adeo natae figurae degenerarent, ut aliam omnino ab eisdem rationem sequi viderentur. Cylindrus enim exempli gratia, in eadem basi et circa eundem axim cum cono constitutus, est ejusdem triplus, cum tamen ex parallelogrammo trianguli dictum conum generantis duplo per revolutionem oriatur etc. — Cum ergo talem varietatem in plurimis aliis figuris saepius ac saepe fuissem meditatus, ubi prius ex. g. cylindrum ex indefinitis numero parallelogrammis, conum vero in eadem basi et circa eundem axim cum cylindro constitutum, ex indefinitis numero triangulis per axem transeuntibus veluti compactum effingens, habita dictorum planorum mutua ratione, illico et ipsorum solidorum ab ipsis genitorum emergere rationem existimabam, cum jam plane constaret planorum rationi genitorum ab iisdem solidorum rationem minime concordare, figurarum mensuram tali ratione inquirentem oleum et operam perdere, ac ex inanibus paleis trituram facturum esse, mihi jure censendum videbatur. Verum paulo profundius rem contemplatus in hanc tandem deveni sententiam, nempe ad rem nostram lineas et plana, non ad invicem coincidentia, sed aequidistantia assumenda esse; sic enim in plurimis ratione investigata reperi tum corporum proportioni ipsorum planorum, tum planorum proportioni ipsarum linearum proportionem (si eo modo sumantur, quo lib. 2. explicatur) ad amussim in omnibus respondere. Cylindrum igitur et conum jam dictos non amplius per axem, sed aequidistanter basi ceu sectos contemplatus, eandem sane rationem habere illa comperi, quae lib. 2. voco omnia plana cylindri ad omnia plana coni, regula communi basi (nempe circulorum congeriem, qui intra cylindrum et conum, veluti vestigia plani a basi ad oppositam basim continuo illi aequidistanter fluentis quodammodo relinqui intelliguntur) ei, quam habet cylindrus ad conum. Optimam ergo methodum figurarum scrutandae mensurae judicavi prius linearum pro planis, et planorum pro solidis rationes indagare, ut illico ipsarum figurarum mensuram mihi compararem, res, puto, juxta vota successit, ut perlegenti patebit. Artificio autem tali usus sum, quale ad propositas quaestiones absolvendas Algebraici adhibere solent, qui quidem numerorum radices, quamvis ineffabiles, surdas, ac ignotas, nihilominus simul aggregantes, subtrahentes, multiplicantes ac dividentes, *dummodo propositae rei exoptatam sibi notitiam enucleare valeant, sua satis obiisse munera sibi persuadent. Non aliter ipse ergo indivisibilium sive linearum, sive planorum congerie (iisdem ut in lib.* 2. *explicatur assumtis) licet quoad eorundem numerum innominabili, surda ac ignota, quoad magnitudinem tamen conspicuis limitibus clausa, ad continuorum investigandam mensuram usus sum, ut legenti in processu operis apparebit.* — Cavaleri denkt sich jede ebene Figur durch parallele Linien, von ihm „*regulae*“*) genannt, begränzt und durch diese letzteren unbegränzte Ebenen, welche auf der Ebene der in Rede stehenden Figur senkrecht stehen, gelegt. Wird nun die eine dieser parallelen Ebenen beweglich angenommen und bis zur andern parallelen continuirlich hinbewegt (entweder *sub recto transitu*, d. h. wenn die Axe, längs welcher die Bewegung geschieht, senkrecht auf der Basis oder der Regel steht, oder *sub eodem obliquo transitu*, d. h. wenn die Axe einen schiefen Winkel mit der Regel bildet) so wird die bewegliche Ebene die gegebene ebene Figur ununterbrochen in Linien schneiden, die unter sich und mit der Regel parallel sind. Anstatt nun die gegebene ebene Figur zu betrachten, betrachtet Cavaleri das durch die gedachte Bewegung erhaltene Netz**) von Linien, und die Eigenschaften, die diesem Aggregat von Linien gemeinsam sind, werden auch der gegebenen ebenen Figur zukommen.***) — Um diese Grundzüge der *Methodus indivisibilium* näher zu erläutern, mag hier dasselbe einfache Beispiel, an welchem Cavaleri in der *Exercitatio tertia* seine Lehre gegen die Einwendun-

---

*) *Regula appellabitur in planis recta linea, cui quaedam lineae ducuntur aequidistantes, et in solidis planum, cui quaedam plana ducuntur aequidistantia, qualis in superioribus est recta linea, vel planum, cujus respectu sumuntur vertices vel opposita tangentia, cui vel utraque vel alterum tangentium aequidistat. Geom. indivisib. lib. I. definit.*

**) *Hinc manifestum est figuras planas nobis ad instar telae parallelis filis contextae concipiendas esse: solida vero ad instar librorum, qui parallelis filis coacervantur.*

***) *Figurae planae habent inter se eandem rationem, quam earum omnes lineae juxta quamvis regulam assumptae; et figurae solidae, quam earum omnia plana juxta quamvis regulam assumpta. Geo. indivis. lib. II. theor. III. — Figurae tam planae, quam solidae sunt in ratione omnium indivisibilium collective. Exercit. prim.*

gen Guldin's vertheidigt, hervorgehoben werden. Denkt man sich durch die gegenüberliegenden Seiten eines Quadrats zwei unbegränzte Ebenen senkrecht auf der Ebene des Quadrats gelegt und die eine dieser Ebenen zur andern immer in gleichen Abständen hinbewegt, so wird in jedem Moment die bewegte Ebene das Quadrat in einer Linie schneiden. *Quapropter,* fährt Cavaleri fort, *singulae rectae lineae in toto hoc motu ut sic in dato quadrato designabiles seu descriptibiles a me dictae fuerunt in definitione prima: Omnes lineae ejusdem quadrati. Cum ergo nulla sit ex praefatis lineis assignabilis in dicto quadrato, per quam non transeat aliquando seu in aliquo momento motum planum (qua ratione dico id ab ipso describi) ideo eas omnes, ita mente collectas, ut nulla excludi supponatur, vocavi: omnes lineas. Quod autem dixi ea fieri in toto motu, subaudi in omnibus instantibus temporis, quo fit totus motus. Apud eos enim, qui sustinent continuum ex Indivisibilibus componi, descriptio dictorum Indivisibilium erit descriptio superficiei. Apud eos vero, qui ultra haec Indivisibilia ponunt aliquid aliud in ipso continuo, illud dicendum erit, describi in ipso motu.* Demnach kommt es Cavaleri nicht auf jede einzelne Linie oder jede einzelne Fläche an, die, wenn die Regel eine Ebene oder einen Körper durchläuft, entweder gleich sind oder nach einem bestimmten Gesetz wachsend oder abnehmend fortgehen, sondern auf die Gesammtheit derselben, gleichsam unzertrennlich oder als Continuum betrachtet. Auf diese Weise wird nach Cavaleri's Meinung nicht allein das Unbestimmte und Unendliche umgangen, welches in der Anzahl der einzelnen Linien oder Flächen liegt, da die Aggregate von Linien und Flächen, welche beziehungsweise die Ebenen und Körper einnehmen, zwischen bestimmten Gränzen, den Regeln, eingeschlossen sind, also etwas Endliches bilden*), sondern auch der Vorwurf vermieden, als denke er sich Linien

---

*) *Posset forte quis circa hanc demonstrationem (lib. II. theorematis I, quod est: Quarumlibet planarum figurarum omnes lineae recti transitus, et quarumlibet solidarum omnia plana sunt magnitudines inter se rationem habentes) dubitare, non recte percipiens quomodo indefinitae numero lineae vel plana, quales esse existimari possunt, quae a me vocantur, omnes lineae vel omnia plana talium vel talium figurarum, possint ad invicem comparari: propter quod innuendum mihi videtur, dum considero omnes lineas vel omnia*

aus Punkten, Flächen aus Linien, Körper aus Ebenen zusammengesetzt. Ueberhaupt kommt es ihm auf die *indivisibilia* selbst nicht an (was darunter verstanden werden soll, wird nirgends bestimmt und deutlich erklärt), sie dienen ihm als Instrument, als Mittel zur Ausmessung der Figuren; *in Nova Geometria Indivisibilium*, sagt er selbst (*Eercit. prim.*) *adhibentur ipsamet Continui Indivisibilia tanquam praecipuum instrumentum ad figurarum tam planarum quam solidarum mensuram comparandam.*

Cavaleri's oben genanntes Werk ist in 7 Bücher getheilt. Im ersten behandelt er, um seiner Methode eine Basis zu geben, die Verhältnisse, in welchen Linien und Flächen beziehungsweise zu einander stehen; die folgenden Bücher bis zum sechsten enthalten die Anwendungen sowohl

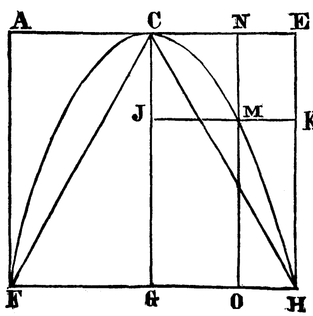
---

plana alicujus figurae, me non numerum ipsarum comparare, quam ignoramus, sed tantum magnitudinem, quae adaequatur spatio ab eisdem lineis occupato, cum illi congruat, et quoniam illud spatium terminis comprehenditur, ideo et earum magnitudo est terminis eisdem comprehensa, quapropter illi potest fieri additio, vel subtractio, licet numerum earundem ignoremus; quod sufficere dico, ut illa sint ad invicem comparabilia, alioquin neque ipsa spatia figurarum essent ad invicem comparabilia: vel enim continuum nihil aliud est praeter ipsa indivisibilia, vel aliquid aliud; si nihil est praeter indivisibilia, profecto si eorum congeries nequit comparari, neque spatium sive continuum erit comparabile, cum illud nihil aliud esse ponatur, quam ipsa indivisibilia: Si vero continuum est aliquid aliud praeter ipsa indivisibilia, fateri aequum est hoc aliquid aliud interjacere ipsa indivisibilia; habemus ergo continuum, disseparabile in quaedam, quae continuum componunt, numero adhuc indefinita, inter quaelibet enim duo indivisibilia aequum est interjacere aliquid illius, quod dictum est esse aliquid aliud in ipso continuo praeter indivisibilia, qua enim ratione tolleretur a medio duorum, a mediis quoque ceterorum tolleretur; hoc cum ita sit, comparare nequibimus ipsa continua sive spatia ad invicem, cum ea quae colliguntur et simul collecta comparantur, scilicet quae continuum componunt, sint numero indefinita, absurdum autem est dicere, continua terminis comprehensa non esse ad invicem comparabilia, ergo absurdum est dicere, congeriem omnium linearum sive planorum duarum quarumlibet figurarum non esse ad invicem comparabilem, non obstante, quod quae colliguntur et illam congeriem componunt, sint numero indefinita, veluti hoc non obstat in continuo; sive ergo continuum ex indivisibilibus componatur, sive non, indivisibilium congeries sunt ad invicem comparabiles, et proportionem habent. Scholium ad Geom. lib. II. theor. I.

auf schon bekannte Sätze der Geometrie, die nach den aufgestellten Principien neu bewiesen werden, als auch auf noch nicht behandelte Probleme. Unter andern bestimmt Cavaleri auch den Inhalt von 20 Körpern Keppler's. Die Principien seiner Methode sind im zweiten Buche enthalten, und er bezeichnet das dritte Theorem dieses Buches als „*maximum fundamentum geometriae suae*" (siehe oben). In dem, dem Beweise dieses Theorems hinzugefügten Corollarium stellt er selbst den Gang seines Verfahrens mit folgenden Worten dar: *Liquet ex hoc, quod ut inveniamus, quam rationem habeant inter se duae figurae planae vel solidae, sufficiet nobis reperire, quam in figuris planis inter se rationem habeant earundem omnes lineae, et in figuris solidis earundem omnia plana juxta quamvis regulam assumpta, quod novae hujus meae geometriae veluti maximum jacio fundamentum.*

Um ein Beispiel zu geben, wie Cavaleri seine Methode zur Anwendung bringt, wähle ich der Vergleichung wegen *lib. IV. prop. I.*, wo von der Quadratur der Parabel die Rede ist. Der Lehrsatz heisst: Wenn ein Parallelogramm und ein Dreieck dieselbe Basis und dieselbe Axe oder Durchmesser mit einem Parabelabschnitt haben, so wird das Parallelogramm $^3/_2$ und das Dreieck $^3/_4$ des Parabelabschnitts betragen.

Fig. 2.



Beweis. Es sei (Fig. 2) FCH der Parabelabschnitt, AH das mit ihm auf gleicher Basis FH stehende Parallelogramm und FCH das Dreieck. Es werde ferner in der Linie CE, welche die Parabel im Punkte C berührt, ein beliebiger Punkt N angenommen, mit der Axe $CG \parallel NO$ und durch den Punkt M, in welchem NO die Curve schneidet, $KJ \parallel FH$ gezogen. Nun ist $\overline{GH}^2$ (oder $\overline{CE}^2$) : $\overline{JM}^2$ (oder $\overline{CN}^2$) $= GC : JC = ON : MN$. Aus dieser Proportion folgt, dass die Quadrate aller Linien CE nach dem Quadrate von CE (dieses als Regel betrachtet) zusammengefasst — mag die Regel in geradem Uebergang sein oder in schiefem — zu den Quadraten aller CN nach $\overline{CN}^2$ als Regel zusammengefasst sich verhalten wie alle Linien des Parallelogramms CH nach ON als Regel zusammengefasst zu allen Linien der Figur $CMHE$ nach der Regel MN zusammengefasst.

Wie sich nun alle Linien von $\# CH$ zu allen von $CMHE$ verhalten, so verhalten sich auch $\# CH : CMHE$; folglich ist, da $CH : CMHE$ sich verhalten wie alle Quadrate in $\# CH$ zu allen Quadraten in $CMHE$, EC als Regel angenommen, und die letzteren im Verhältniss von $3 : 1$ stehen*), auch $\# CH = 3\,CMHE = \frac{3}{2}\,CMHG$, und $\# AH = \frac{3}{2}\,FCH$, was zu beweisen war.

Wie wenig Cavaleri's Verfahren den strengen Anforderungen der Wissenschaft genügt, wurde schon vielfältig von seinen Zeitgenossen, namentlich von Guldin, gerügt. Der Widerspruch im Princip der Methode, continuirliche Grössen auf discontinuirlichem Wege bestimmen zu wollen, trat zu grell hervor, obgleich Cavaleri durch die Bewegung und durch die begränzenden Regeln ihn möglichst zu verhüllen sich bestrebte. Viele Stellen in den oben angeführten Schriften beweisen, dass Cavaleri selbst diesen Widerspruch sehr wohl fühlte und das Schwankende seiner Methode bemerkte; denn er äussert öfters, dass mittelst seiner Methode gewiss das Wahre erreicht würde, wenn man sie nur richtig gebrauche (*si modo lector recte ea utatur*). Als eine Folge dieses Widerspruchs im Fundament der Methode ist denn auch das zu betrachten, dass Cavaleri keine Definition des Wortes „*indivisibilia*" aufzustellen vermag. Eine solche findet sich nirgends in seinem ersten Werke; in der später erschienenen *Exercitat. prim.* hilft er sich durch Vergleichungen, verwickelt sich jedoch dabei in offenbare Widersprüche, denn nachdem er gesagt, dass er die ebene Figur gleichsam als ein Gewebe mit parallelen Fäden und die Körper gleichsam als Bücher betrachte, deren parallele Blätter auf einander gehäuft sind, fügt er hinzu: *Cum vero in tela sint semper fila, et in libris semper folia numero finita, habet enim aliquam crassitiem, nobis in figuris planis lineae, in solidis vero plana numero indefinita, ceu omnis crassitiei expertia, in utraque methodo supponenda sunt.* Zwar erklärt Cavaleri in der *Exercit. prim.*, dass er die *indivisibilia* als „*instrumentum praecipuum*" zur Bestimmung der continuir-

---

*) Nach einem früheren Satze, dass wenn ein Parallelogramm durch eine Diagonale in zwei Dreiecke getheilt wird, alle Quadrate des Parallelogramms zu allen Quadraten eines jeden der Dreiecke sich wie $3 : 1$ verhalten, eine Seite des Parallelogramms als gemeinsame Regel angenommen.

lichen Grössen betrachtet; in der *Exercit. tert.* indess, in welcher er seine Methode gegen Guldin's Einwürfe vertheidigt, fasst er die *indivisibilia* als Grössen, die sich von Keppler's *corporibus minutissimis* nur dadurch unterscheiden, dass er sie nicht wie Keppler's unendlichkleine Grössen neben einander geordnet, sondern wie die Blätter eines Buches gleichsam aufeinander gehäuft oder geschichtet wissen will. An einer andern Stelle (*scholium* zu *lib. II. theor. I.*) lässt Cavaleri unentschieden, ob die Flächen und Körper bloss aus *indivisibilibus* bestehen oder ob zwischen denselben noch etwas enthalten sei; ebenso in *Exercitat. prim.*

So scheint Cavaleri das Princip seiner Methode mehr gefühlt als klar sich vorgestellt zu haben, und nur deshalb, weil er schon bekannte Resultate durch sein Verfahren auf einem einfacheren Wege erhielt, glaubte er dasselbe den Geometern nicht vorenthalten zu dürfen.*) Im

*) *Haud quidem me latet circa continui compositionem, nec non circa infinitum, plurima a philosophis disputari, quae meis principiis obesse non paucis fortasse videbuntur, propterea nempe haesitantes, quod omnium linearum seu omnium planorum conceptus cimeriis veluti obscurior tenebris inapprehensibilis videatur: vel quod in continui ex indivisibilibus compositionem mea sententia prolabatur: vel tandem quod unum infinitum alio majus dari posse pro firmissimo geometriae sternere ausim fundamento. His tamen ego per ea, quae lib. II. prop. I. ac illius scholio praecipue declarata ac demonstrata sunt, satisfieri posse dijudicavi: quoad conceptum enim omnium linearum seu omnium planorum efformandum, facile hoc per negationem nos consequi posse existimavi, ita nempe ut nulla linearum seu planorum excludi intelligatur. Quoad continui autem compositionem manifestum est ex praeostensis ad ipsum ex indivisibilibus componendum nos minime cogi, solum enim continua sequi indivisibilium proportionem, et e converso, probare intentum fuit, quod quidem cum utraque positione stare potest. Tandem vero dicta indivisibilium aggregata non ita pertractavimus, ut infinitatis rationem propter infinitas lineas seu plana subire videantur, sed quatenus finitatis quandam conditionem et naturam sortiuntur, ut propterea et augeri et diminui possint, ut ibidem ostensum fuit, si ipsa prout diffinita sunt accipiantur. Sed his nihilominus forte obstrepent Philosophi reclamabuntque Geometrae, qui purissimos veritatis latices ex clarissimis haurire fontibus consuescunt, sic objicientes: Hic dicendi modus adhuc videtur subobscurus; durior quam par est, evadit hic omnium linearum seu omnium planorum conceptus, quapropter hunc tuae geometriae ceu Gordium nodum aut auferas aut saltem frangas, nisi dissolvas. Fregissem quidem fateor, o Geometrae, vel omnino a priori-*

Bewusstsein, dass er denjenigen unter ihnen, welche durch das Studium der griechischen Mathematiker gebildet, die strengste Evidenz als die hauptsächlichste Forderung an die Wissenschaft zu stellen gewohnt sind, hinsichtlich der Principien seiner neuen Methode nicht genügen werde, fügte er den sechs Büchern seiner *Geometria* ein siebentes hinzu, in dem er die in den ersten Büchern gewonnenen Hauptlehrsätze ohne Gebrauch des Unendlichen noch einmal ableitet, und nannte dies Verfahren im Gegensatz zu dem erstern die *posterior methodus indivisibilium.* Cavaleri vergleicht in diesem siebenten Buche die *indivisibilia* nicht in ihrer Gesammtheit (*collective*), sondern an einzelnen Stellen (*distributive*) und stellt den folgenden Fundamentalsatz für diese zweite Methode auf: Wenn in zwei Figuren von gleicher Höhe Linien oder Flächen, die in gleichen Abständen von der Basis einer jeden Figur gezogen werden, einander gleich sind, so werden auch die Figuren gleich sein müssen. — Wie gering die Anwendung dieses Verfahrens ist, leuchtet sogleich ein.

Cavaleri's unbestrittenes Verdienst ist, an die Stelle des strengen indirecten Verfahrens der griechischen Geometer ein allgemein anwendbares, directes gesetzt zu haben, das, wenn auch auf schwachem Fundament ruhend, mit grösster Leichtigkeit in schwierigen Untersuchungen angewandt werden konnte. Obwohl man fast allgemein die geringe Zuverlässigkeit der *Methodus indivisibilium* erkannte, so bedienten sich doch die gleichzeitigen, so wie nachfolgenden Mathematiker derselben oder wenigstens eines ganz ähnlichen Verfahrens bei Discussionen von Problemen aus der höhern Geometrie; die *Methodus indivisibilium* blieb bis zur Einführung des Algorithmus der höheren Analysis das einzige

---

bus libris sustulissem, nisi indignum facinus mihi ipsum fuisset, nova haec geometriae veluti mysteria sapientissimis abscondere viris, ut his fundamentis, quibus tot conclusionum ab aliis quoque ostensarum veritates adeo mire concordant, alicujus industria melius forte concinnatis, hujusce nodi exoptatam illis dissolutionem aliquando praestare possint. Interim qualiscunque mea fuerit illius tentata dissolutio, ipsum tamen in praesenti libro novis aliis denuo stratis fundamentis, quibus ea omnia, quae indivisibilium methodo in antecedentibus libris jam ostensa sunt, alia ratione ab infinitatis exempta conceptu comprobantur, omnino e medio tollendum esse censui. Aus der Vorrede zum siebenten Buche.

Mittel besonders zur Bestimmung des Inhalts körperlicher Räume, und aus dem Folgenden wird sich ergeben, wie mächtig sie zur Entdeckung der Differential- und Integralrechnung mitgewirkt hat. Deshalb muss die *Methodus indivisibilium* Cavaleri's als Epoche machend in der Geschichte der Entstehung der höheren Analysis betrachtet werden.

Cavaleri's Verfahren in der ursprünglichen Gestalt wurde nur von den italischen Mathematikern aufgenommen, und Torricelli (1608 bis 1647) der berühmte Schüler Galiläi's, fand mit Hülfe desselben den Flächeninhalt der Cycloide dreimal so gross, als den des erzeugenden Kreises. Die gleichzeitigen französischen Mathematiker Fermat, Roberval waren bereits, bevor Cavaleri's *Methodus indivisibilium* erschien, im Besitz eigenthümlicher Methoden, welche sie sich durch ein sorgfältiges Studium der Geometer des Alterthums, besonders aus Archimed's Schriften, gebildet hatten; beide waren in den Geist der alten Geometrie tief eingedrungen, und ihre Schriften zeigen zum Theil einen Abglanz jener mathematischen Evidenz, wovon die Werke der griechischen Geometer ein unübertreffliches Muster für alle Zeiten darbieten. Das Bestreben jedoch, ihren Methoden die möglichste Allgemeinheit zu verleihen, nöthigte sie, in ihren Untersuchungen über Quadraturen und Cubaturen den rein geometrischen Gang der griechischen Geometer, den man bisher noch im Allgemeinen inne gehalten hatte, zu verlassen und nach dem Vorgange Vieta's*) die räumlichen Grössen der Geometrie durch Zahlen und allgemeine Zeichen auszudrücken.**) Wenn dadurch der Gang der

*) Vieta's Verdienste in Betreff der innigeren Verbindung der Algebra mit der Geometrie hat man stets zu wenig beachtet; ihm muss als Vorgänger von Descartes, welcher die ersten Schritte Vieta's weiter verfolgte und in ein System brachte, eine weit höhere Stelle in der Geschichte der mathematischen Wissenschaften angewiesen werden, als bisher geschehen ist. Insbesondere darf hier nicht unerwähnt bleiben, dass Vieta zuerst nach dem Beispiel von Archimed's Quadratur der Parabel die Fläche des Kreises durch eine unendliche Reihe auszudrücken versuchte. *Vietae op. ed. Schooten. p.* 400.

**) *Quid facerem, a tanto viro* (Fermat) *incitatus? Laboravi, atque in auxilium infinita nostra advocavi, eaque tum primum ad numeros extendi,* Untersuchungen wesentlich erleichtert, die Beweisführung vereinfacht, das so grell hervortretende Heterogene in der Methode Cavaleri's künstlich verschleiert wurde, so darf auf der andern Seite nicht unbemerkt bleiben, dass durch diese Anwendung der Arithmetik auf die Raumgrössen die Geometrie die von den Geometern des Alterthums so sorgfältig gewahrte Reinheit der Form verlor, dass man im Verfolgen der Rechnung die ursprünglich gegebenen räumlichen Grössen unbeachtet liess und allmählich so den unbestimmten Begriffen des Unendlichen und Unendlichkleinen in geometrischen Untersuchungen Eingang und gewissermassen Berechtigung verschaffte. —

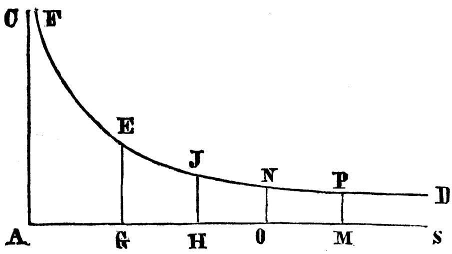
Fermat's*) Schriften beweisen, mit welcher Vorliebe und mit wie grosser Gründlichkeit er die Meisterwerke der griechischen Mathematiker studirt hat; auf dieser Grundlage schwang er sich zu der Höhe empor, auf welcher wir ihn noch gegenwärtig bewundern. In seinen Untersuchungen über Quadraturen nahm sich Fermat Archimed's Quadratur der Parabel zum Muster**); ebenso wie letzterer durch die Bestimmung der Abnahme der nach und nach im parabolischen Segment eingeschriebenen Dreiecke rücksichtlich des Dreiecks von gleicher Grundlinie und Höhe mit dem Segment auf eine geometrische Progression kam, deren Summe er fand, auf demselben Wege gelangte auch Fermat zur Quadratur der Parabeln und Hyperbeln höherer Ordnungen. Er legte hierbei folgendes Theorem zu Grunde: Wenn die Glieder einer geometrischen Progression ins Unendliche abnehmen, so verhält sich das grösste Glied der Progression zu allen übrigen, wie die Differenz der Glieder zu dem kleinsten. Ist (Fig. 3) FND eine hyperbolische Curve, die in Bezug auf die Asymptoten AC, AS durch die Relation $AH^2 : AG^2$

Animadverti enim et parabolarum plana ad sua parallelogramma, et earundem solida ad suos cylindros, et spatia helicum ad suos circulos feliciter comparari posse, si innotesceret in numeris ratio summae potestatum omnium ejusdem generis, ordine atque indefinite sumptarum, ad earum maximum toties sumptam; idque in omni genere potestatum. Aus Roberval's Schreiben an Torricelli. Ueber dasselbe siehe weiter unten.

*) Geb. 1590, Parlamentsrath zu Toulouse, gest. 1663.

**) Vergl. die Abhandlung: *De aequationum localium transformatione et emendatione etc. Fermat. op. math. p.* 44.

Fig. 3.



$= GE : HJ$ bestimmt ist, und bilden AG, AH, AO u. s. w. die Glieder einer geometrischen Progression, so verhalten sich die Parallelogramme GJ, HN, OP u. s. w. wie $AH : AG$ — die Theilpunkte G, H, O u. s. w. können einander so nahe genommen werden, dass die gemischtlinige Figur $GEHJ$ dem Parallelogramm aus EG und GH gleich wird, was sich *„per circumscriptiones et inscriptiones Archimedeas“* beweisen lässt — folglich wird nach dem obigen Theorem die Differenz GH zu dem kleinsten Gliede AG sich verhalten, wie das Parallelogramm $GJ = GE \,.\, GH$ zu allen übrigen Parallelogrammen. Es ist aber $GH : AG = GE \,.\, GH : GE \,.\, AG$, daher $GE : GH$ zu allen übrigen Parallelogrammen, wie $GE \,.\, GH : GE \,.\, AG$, d. h. $GE \,.\, GA$ gleich allen andern Parallelogrammen. — Auf ganz ähnliche Weise verfährt Fermat bei der Quadratur der Parabeln: er theilt die Axe in Abschnitte, die sich wie die Glieder einer geometrischen Progression verhalten, errichtet in den Theilpunkten Senkrechte, betrachtet die zwischen je zwei Senkrechten liegenden Flächen als Parallelogramme und ermittelt deren Verhältniss zu dem Parallelogramm, das mit der Parabelfläche gleiche Grundlinie und Höhe hat. — Es ist nicht zu verkennen, dass ebenso wie das von Fermat zu Grunde gelegte Theorem, auch das Fundament des Verfahrens wesentlich arithmetisch ist. Die Fortschritte, die seit dem Wiederaufleben der Wissenschaften die Algebra gemacht, und die wichtigen Entdeckungen, mit welchen Fermat selbst die Zahlenlehre bereichert hatte, bewirkten, dass in der Behandlung geometrischer Probleme ein dem früheren entgegengesetzter Weg eingeschlagen wurde: man untersuchte die Gleichungen, ohne Rücksicht darauf zu nehmen, welche geometrische Bedeutung denselben beizulegen sei, und übertrug die gewonnenen Resultate auf räumliche Grössen. Wenn es nun auch auf diese Weise gelang, allgemeinere Verfahrungsweisen herzustellen, als bisher möglich gewesen war, und die Quadratur ganzer Gruppen von Curven zu bewirken, so blieb man doch noch weit entfernt, eine durchgreifend allgemeine Methode aufzustellen.

Roberval*) war durch eine von Mersenne ihm vorgelegte Aufgabe über die Cycloide, deren Auflösung er nicht finden konnte, veranlasst worden, auf die Schriften der griechischen Geometer zurückzugehen. Durch ein tiefes Studium der Schriften Archimed's bildete er sich eine eigene Methode, durch die er die Probleme Fermat's über die Quadratur der Parabeln und Hyperbeln höherer Ordnungen zu lösen vermochte**). Roberval nannte seine Methode ebenfalls „*par les indivisibles*“, und er hat eine besondere Abhandlung: *Traité des indivisibles*, verfasst. In dieser letztern sowohl, als in jenem Schreiben an Torricelli erklärt er sich über das Wesen derselben sehr bestimmt. *Pour tirer des conclusions par le moyen des indivisibles*, heisst es zu Anfang des *Traité des indivisibles*, *il faut supposer que toute ligne, soit droite ou courbe, se peut diviser en une infinité de parties ou petites lignes toutes égales entr'elles, ou qui suivent entr'elles telle progression que l'on voudra, comme de quarré à quarré, de cube à cube, de quarré-quarré à quarré-quarré, ou selon quelqu'autre puissance. Or d'autant que toute ligne se termine par des points, au lieu de lignes on se servira de points; et puis au lieu de dire que toutes les petites lignes sont à telle chose en certaine raison, on dira que tous ces points sont à telle chose en la dite raison.* Dasselbe gilt von Flächen und Körpern. Roberval schliesst mit der folgenden allgemeinen Betrachtung: *Par tout ce discours on peut comprendre que la multitude infinie de points se prend pour une infinité de petites lignes, et*

---

*) Professor der Mathematik zu Paris, geb. 1602, gest. 1675. Sein eigentlicher Name ist Personier; den Namen Roberval nahm er von seinem Geburtsort Roberval, einem Dorfe in der Diöcese von Bauvais, an und schrieb sich Personier de Roberval.

**) Seinen Bildungsgang erzählt Roberval selbst in einem langen Schreiben an Torricelli, das für die gleichzeitige Geschichte der mathematischen Wissenschaften von der höchsten Wichtigkeit ist. *Interea*, sagt er darin, *cum mecum ipse saepius cogitarem, qua potissimum ratione possem in suavissimae Matheseos adita penetrare, statui divinum Archimedem, quem fere unum inter antiquos geometros suscipio, attentius considerare, ex qua consideratione sublimem illam et nunquam satis laudatam infiniti doctrinam mihi comparavi.* — Dieses Schreiben Roberval's an Torricelli befindet sich, wie alle seine übrigen Schriften, in: *Divers Ouvrages de mathématique et de physique par Messieurs de l'Académie royale des sciences. Paris* 1693. *Tom. I.*

compose la ligne entiére. L'infinité de lignes représente l'infinité de petites superficies qui composent la superficie totale. L'infinité de superficies représente l'infinité de petits solides qui composent ensemble le solide total. — Durch die folgenden Stellen, die ebenfalls aus dem *Traité des indivisibles* entlehnt sind, wird namentlich die Methode Roberval's charakterisirt: *Le grand triligne* (ein von der Conchoide begränztes Dreieck) *est divisé* (*selon les indivisibles*) *en secteurs semblables infinis qui ressemblent aux triangles, mais par les indivisibles nous les prenons pour secteurs.* Desgleichen heisst es an einem andern Orte: *J'oste par les indivisibles la portion de la ligne, cette portion estant une et terminée, ne deminue rien dans l'infini* (*car tout ce qui est fini et terminé comme* 1, 2, 3, 4 *et tant de nombres terminez qu'on voudra, n'augmente ny ne diminue rien dans les infinis*). Ebenso schreibt Roberval an Fermat (*Fermat. op. math. p.* 140)*: Et je me trompe fort, si je n'ai rencontré le même moyen que vous, me servant des lignes paralleles à l'axe et des portions de ces lignes, prises entre les paraboles* (es ist von Parabeln die Rede) *et la ligne qui touche les mêmes paraboles par le sommet, lesquelles portions se suivent en la raison de l'ordre naturel des nombres quarrés ou des nombres cubes etc.* — In dem schon mehr erwähnten Schreiben an Torricelli spricht Roberval auch über den Unterschied, der zwischen seiner und der Methode Cavaleri's stattfindet: *Est inter Cavalerii methodum et nostram exigua quaedam differentia; ille enim cujusvis superficiei indivisibilia secundum infinitas lineas, solidi autem indivisibilia secundum infinitas superficies considerat. — Nostra autem methodus, si non omnia, certe hoc cavet, ne heterogenea comparare videatur: nos enim infinita nostra seu indivisibilia sic consideramus. Lineam quidem tanquam si ex infinitis seu indefinitis numero lineis constet, superficiem ex infinitis seu indefinitis numero superficiebus, solidum ex solidis, angulum ex angulis, numerum indefinitum ex unitatibus indefinitis: immo plano-planum ex plano-planis numero indefinitis componi concepimus, atque ita de altioribus; singula enim suas habent utilitates. Dum autem speciem aliquam in sua infinita resolvimus, aequalitatem quandam, vel certe notam aliquam progressionem inter partium altitudines aut latitudines fere semper observamus.* — Roberval bestrebte sich seine Methode mehr an das Wesen der alten Geometrie anzuschliessen, als Fermat; er will auch das Wort „unendlich“ verbannt wissen*). Sein rein geometrisches Verfahren, Tangenten an krumme Linien zu ziehen, von dem weiter unten die Rede sein wird, bietet einen weitern Belag für diese Behauptung.

In innigster Berührung mit Fermat und Roberval stand Pascal (1623 bis 1662), der gleichfalls eine eigene Methode zur Behandlung der Probleme aus der höheren Geometrie sich schuf, indem er das Princip der Methode Cavaleri's beibehielt und das mit der Wissenschaft Unvereinbare durch eine schärfere Auffassung des Wesens dieser Methode deutete. Am ausführlichsten spricht Pascal selbst über seine Methode in dem Schreiben, welches er unter dem angenommenen Namen Dettonville an Herrn de Carcavi richtete (*Oeuvres de Pascal. Tom. V. p.* 246): *J'ai voulu faire cet avertissement, pour montrer que tout ce qui est démontré par les véritables regles des Indivisibles, se démontrera aussi à la rigueur et à la maniere des Anciens; et qu'ainsi l'une de ces méthodes ne differe de l'autre qu'en la maniere de parler: ce qui ne peut blesser les personnes raisonnables, quand on les a une fois averties de ce qu'on entend par-là. Et c'est pourquoi je ne ferai aucune difficulté dans la suite d'user de ce langage des Indivisibles, la somme des lignes, ou la somme des plans; et ainsi quand je considérerai, par exemple, le diametre d'un demi-cercle divisé en un nombre indéfini de parties égales aux points Z, d'où soient menées les ordonnées ZM, je ne ferai aucune difficulté d'user de cette expression, la somme des ordonnées, qui semble ne pas être géométrique à ceux qui n'entendent pas la doctrine des Indivisibles, et qui s'imaginent que c'est pécher contre la Géometrie, que d'exprimer un plan par un nombre indéfini de lignes; ce qui ne vient que de leur manque d'intelligence, puisqu'on n'entend autre chose par-là sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diametre, dont la somme est certainement un plan, qui ne differe de l'espace du demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée.* — Besonders ist

---

*) *Inventa*, schreibt Roberval an Torricelli, *infiniti doctrina* (*liceat adhuc eo nomine uti in hac epistola; posthac absit*) *eaque pro tempore satis probe exculta, ego ad tangentes curvarum animum applicui etc.*

noch hervorzuheben, dass Pascal mit dieser Methode die Untersuchungen über Summationen von Reihen, die er mit Hülfe seines arithmetischen Dreiecks angestellt hatte, in Verbindung zu setzen wusste; er bahnte dadurch den Weg an, welchen Wallis in der *Arithmetica Infinitorum* mit grossem Glück weiter verfolgte*) und welchen auch Newton vor der Entdeckung der Fluxionsrechnung mit bedeutendem Erfolg betrat. Namentlich aber ist das offene Geständniss Leibnizens hervorzuheben, dass das Studium des oben erwähnten Pascal'schen Schreibens an Carcavi ihn in der Erkenntniss der höheren Analysis wesentlich gefördert habe**). Demnach sind die Schriften Pascal's für die Entwickelung des Princips der höheren Analysis von der höchsten Bedeutung; wie nahe er selbst demselben kam und zu welcher Höhe der Betrachtung er sich erhob, erhellt am schönsten aus der Bemerkung, mit welcher er die Abhandlung: *Potestatum Numericarum summa* (*Oeuvr. de Pascal, Tom. V. p.* 122) schliesst: *Haec obiter notavi, reliqua facili negotio penetrantur, eo posito principio, in continua quantitate, quotlibet quantitates cujusvis generis quantitati superioris generis additas, nihil ei superaddere. Sic puncta lineis, lineae superficiebus, superficies solidis, nihil adjiciunt: seu ut numericis, in numerico tractatu, verbis utar, radices quadratis, quadrata cubis, cubi quadrato-quadratis etc. nihil apponunt. Quare, inferiores gradus nullius valoris existentes, non considerandi sunt. Haec, quae Indivisibilium studiosis familiaria sunt, subjungere placuit, ut nunquam satis mirata connexio, qua ea etiam quae remotissima videntur, in unum addicat unitatis amatrix natura, ex hoc exemplo prodeat, in quo quantitatis continuae dimensionem cum numericarum potestatum summa conjunctam contemplari licet.*

Fermat, Roberval, Pascal haben gleichzeitig zur Erkenntniss des

---

*) Es ist jedoch zu bemerken, dass Wallis, ohne von Pascal's Schrift über das arithmetische Dreieck etwas zu wissen, auf seine in der *Arithmetica Infinitorum* niedergelegte Methode gekommen ist, denn Pascal's Schrift wurde erst nach seinem Tode im Jahre 1662 vollständig gedruckt unter seinen Papieren aufgefunden. Vergl. Pascal's Leben in der ersten Ausgabe von Bossut's Geschichte der Mathematik, deutsch. Uebers. S. 463.

**) Vergl. die von mir herausgegebene Schrift: *Historia et origo calculi differentialis a G. G. Leibnitio concripta. Hann.* 1846. S. 8.

Wesens der höheren Analysis mächtig beigetragen: sie alle drei, gebildet durch ein sorgfältiges Studium der Meisterwerke der griechischen Mathematiker, verstanden die Methoden der Neueren mit den strengen Forderungen der Geometrie des Alterthums zu vereinen und gelangten so zu jenen glänzenden Entdeckungen in fast allen Gebieten der mathematischen Wissenschaften, durch die ihre Namen unsterblich geworden sind. —

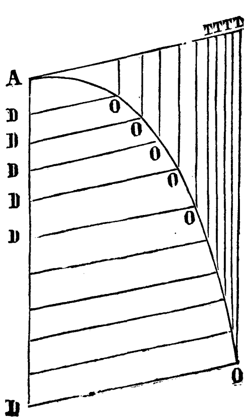
Bisher waren die Geometer in den Untersuchungen über Quadraturen und Cubaturen im Allgemeinen von der Betrachtung der geometrischen Figur ausgegangen und hatten die arithmetische Behandlung der Probleme dadurch gewissermassen zu verdecken gesucht — Wallis (Professor der Geometrie zu Oxford, geb. 1606, gest. 1703) schlug den entgegengesetzten Weg ein. In seiner *Arithmetica Infinitorum, Oxon.* 1655 untersucht er zuerst das Verhältniss, welches zwischen der Summe einer gegebenen Reihe von Zahlen und der grössten derselben stattfindet, und bringt alsdann das gewonnene Resultat auf geometrische Grössen zur Anwendung. Durch Induction und Analogie, zwei Hülfsmittel, von welchen Wallis sehr geschickt den ausgedehntesten Gebrauch zu machen verstand, wurde es ihm möglich, alles das, was bisher durch Summation von Reihen im Einzelnen erreicht worden war, in Zusammenhang zu bringen und gewissermassen systematisch zu behandeln. Er beginnt mit der Bestimmung des Verhältnisses, welches zwischen der Summe einer beliebigen Anzahl Glieder der natürlichen Zahlenreihe zu der Summe aus ebenso vielen Zahlen, die sämmtlich dem grössten Gliede jener Reihe gleich sind, stattfindet und erweitert diese Untersuchung auf die Reihen der Quadrate, Cubikzahlen u. s. w. bis zur sechsten Potenz. Durch eine glückliche Analogie geleitet betrachtet Wallis Ausdrücke von der Form $\frac{1}{a^m}$, $\sqrt{a}$ beziehungsweise als gleich mit a^{-m}, $a^{\frac{1}{2}}$ *) und so vermochte er die Summen der den obigen reciproken Reihen, so wie diejenigen, deren Glieder von Quadrat-, Cubikwurzeln u. s. w. gebildet werden, zu bestimmen. Fermat, Roberval und nach ihnen Cavaleri hatten gefunden, dass

*) Die wirkliche Einführung der Bezeichnung, dass $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, verdanken wir Newton. Vergl. den ersten Brief Newton's an Leibniz (Leibnizens mathematische Schriften, Berlin 1849, Theil 1, S. 101).

wenn die Ordinaten einer Curve sich verhalten wie die Potenzen der Abscissen (die Exponenten der Potenzen als ganze positive Zahlen vorausgesetzt), der Ausdruck $\frac{1}{m+1}$, in welchem m den Exponenten der Potenz bezeichnet, das Verhältniss zwischen der Curve und einer geradlinigen Figur von gleicher Grundlinie und Höhe darstellt; Wallis zeigt vermöge der oben erwähnten Summationen, dass derselbe Ausdruck auch gilt, wenn die Exponenten negativ oder gebrochen sind.

Um Wallis' Verfahren durch ein Beispiel zu erläutern, soll des Vergleichs wegen die Quadratur der Parabel nach seiner Weise hier ausführlich betrachtet werden (*Arith. Infinit. prop. XIX—XXIII*). Nachdem er gezeigt, dass $\frac{0+1=1}{1+1=2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, $\frac{0+1+4=5}{4+4+4=12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$, $\frac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36}=\frac{7}{18}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$, $\frac{0+1+4+9+16=30}{16+16+16+16+16=80}=\frac{3}{8}=\frac{9}{24}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$, $\frac{0+1+4+9+16+25=55}{25+25+25+25+25+25=150}=\frac{11}{30}=\frac{1}{3}+\frac{1}{30}$ u. s. w., woraus er wegen der continuirlichen Abnahme von $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{30}$ u. s. w. allgemein folgert, dass die Summe einer beliebigen Anzahl von Quadratzahlen (0 nicht ausgeschlossen) zu einer Summe, die aus gleichvielen, der grössten Quadratzahl gleichen Summanden besteht, sich wie 1 : 3 verhält, so macht er die Anwendung dieses Resultats auf die Quadratur der Parabel folgendermassen: *ADO* (Fig. 4) sei die Parabel, *A* deren Scheitel, *AD* der Durchmesser, *DT* ein Parallelogramm auf der Basis *DO* und von gleicher Höhe mit der Parabel. Alle Linien *DO* sind parallel der Basis, desgleichen alle *OT* parallel dem Durchmesser *AD*. Da sich nun nach der Eigenschaft der Parabel die Linien *AD* = *OT* sich verhalten wie $\overline{DO}^2 = \overline{AT}^2$, so wird die ganze Figur *AOT* (die aus unzähligen Graden *OT* besteht, die sich ver-

Fig. 4.



halten, wie die Quadrate von AT) zu dem gleich hohen Parallelogramm TD (das aus ebenso vielen Geraden besteht, die sämmtlich der grössten OT gleich sind) sich verhalten wie $1:3$, folglich die Parabelfläche zum Parallelogramm wie $2:3$. —

Das Ziel, welches Wallis bei diesen Untersuchungen zu erreichen strebte, war, einen Ausdruck für den Inhalt des Kreises zu finden; er wandte sich deshalb zunächst zur Betrachtung von Reihen, deren Glieder aus zweitheiligen Ausdrücken von der Form $(aa \pm xx)^0$, $(aa \pm xx)^1$, $(aa \pm xx)^2$ u. s. w. gebildet sind, und fand, dass der Inhalt der durch solche Reihen dargestellten Flächenräume beziehungsweise durch die Ausdrücke x, $aax \pm \frac{x^3}{3}$, $a^4x \pm \frac{2aax^3}{3} \pm \frac{x^5}{5}$ u. s. w. ausgedrückt werde. Da aber die Ordinate des Kreises, dessen Radius a, dem Ausdrucke $\sqrt{aa - xx}$ gleich ist, so nahm Wallis seine Zuflucht zur Interpolation; er schloss, dass so wie der Ausdruck $\sqrt{aa - xx}$ zwischen $(aa - xx)^0$ und $(aa - xx)^1$ fällt, ebenso auch der Ausdruck für den durch die Reihe von Grössen $\sqrt{aa - xx}$ dargestellten Flächenraum zwischen x und $aax - \frac{x^3}{3}$ fallen müsse, und gelangte auf diese Weise zu dem nach ihm benannten Ausdrucke für die Fläche des Kreises. — Im Allgemeinen ist zu bemerken, dass von Wallis in der Anwendung der arithmetisch gewonnenen Resultate auf geometrische Grössen die Methode Cavaleri's unverändert zu Grunde gelegt wurde; nur das ist hervorzuheben, dass besonders die calculatorische Seite der bisherigen Bestrebungen durch ihn eine bedeutende Ausbildung erhielt und dass man nach seinem Vorgange sich gewöhnte, die Reihen selbstständig ohne allen Bezug auf ihre Anwendung in der Geometrie zu behandeln.

Die Untersuchungen von Wallis erhielten ihren Abschluss durch die Quadratur der Hyperbel, welche Nicolas Mercator (ein Holsteiner von Geburt, daher vielleicht sein eigentlicher Name Kramer oder Kaufmann) in seiner *Logarithmotechnia, Lond.* 1668 bekannt machte. Derselbe fand nämlich, dass wenn die Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel als Coordinatenaxen angenommen werden, jede Ordinate $y = \frac{1}{1 + x}$ ist. Er dividirte nun den Zähler dieses Bruchs durch den Nenner und erhielt so den Werth der Ordinate durch eine unendliche Reihe ausgedrückt; sämmtliche Ordinaten aber bestimmten nach Wallis' Summationsmethode die Fläche zwischen der Curve und den Asymptoten; durch Addition aller für die einzelnen Ordinaten erhaltenen Reihen ergab sich demnach ein Ausdruck für die Fläche zwischen der Curve und den Asymptoten und zwar in Form einer unendlichen Reihe. — Bisher hatte man sich begnügt, nach dem Vorgange Archimed's die krummlinig begränzten Flächenräume mit geradlinigen zu vergleichen; die Bestimmung des Inhalts der gleichseitigen Hyperbel durch Mercator ist demnach die erste absolute Quadratur. Sie machte deshalb allgemeines Aufsehen; Leibniz und Newton schätzten sie sehr hoch.

Bevor noch die *Arithmetica Infinitorum* erschien, hatte der niederländische Mathematiker Gregorius a St. Vincentio (geb. zu Brügge 1584, gest. zu Gent 1667) ein umfangreiches Werk: *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni decem libris comprehensum, Antwerp.* 1647, herausgegeben, in welchem er als Endziel seiner Untersuchungen mehrere Wege zur Ermittelung der geometrischen Quadratur des Kreises lehrt.*) Schwerlich ist je für dieses vergebliche Unternehmen mehr Scharfsinn und grössere Arbeit aufgewandt worden, als von dem genannten Schriftsteller geschehen; daher ist denn aber auch sein Werk trotz des verfehlten Zieles eine wahre Fundgrube der schönsten geometrischen Wahrheiten geworden. Nicht nur gedenken die bedeutendsten unter den gleichzeitigen Mathematikern, wie Hugens, Leibniz, desselben lobend, auch in neuester Zeit haben Geometer ersten Ranges eindringlich darauf aufmerksam gemacht, wie unverdient dieses grosse Werk so ganz der Vergessenheit anheim gefallen sei.**) — In der Vor-

---

*) Eine Inhaltsangabe des genannten Werkes findet sich in Kästner's Geschichte der Mathematik, Theil 3. S. 221 ff.

**) Chasles Geschichte der Geometrie, deutsch von Sohncke, S. 87 f. Daselbst wird erwähnt, dass Leibniz durch die Betrachtung der Figuren in dem Werke des Gregorius auf sein differentiales Dreieck (das Leibnizische *triangulum characteristicum*) geführt sein könnte. Ich habe das Exemplar der Königl. Bibliothek zu Hannover, welches Leibniz besass und in dem er an mehreren Stellen Anmerkungen beigeschrieben hat, genau durchgesehen, ohne jedoch die geringste Andeutung in dieser Hinsicht zu finden. Auch aus den rede erzählt Gregorius, dass er nach mehreren vergeblichen Versuchen darauf gekommen sei, durch Cubirung von Körpern, deren Durchschnitte Kreisebenen oder Kreissegmente bilden, zur Quadratur des Kreises zu gelangen. Da ihm die damals gebräuchlichen Cubirungsmethoden für seinen Zweck nicht genügten, so erdachte er ein eigenthümliches Verfahren, durch Bewegung einer Ebene auf einer andern die Körper zu erzeugen, wodurch er zugleich ein Mittel gewann, den erzeugten Körper mit einem andern, dessen cubischer Inhalt bekannt war, vergleichen zu können. Er nannte deshalb sein Verfahren „*ductus plani in planum.*“ Im Uebrigen darf nicht unerwähnt bleiben, dass Gregorius alles, was er in seinem Werke vorträgt, durchgängig streng geometrisch im Sinne der alten Geometrie behandelt, und dass er bei der Quadratur der Kegelschnitte auf ähnliche Weise verfährt, wie die Geometer des Alterthums. —

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der Methoden, Tangenten an krumme Linien zu ziehen, die grössten und kleinsten Werthe der Ordinaten zu bestimmen u. s. w., welche zum Verständniss der Differentialrechnung und zu ihrer Verbreitung so wesentlich beigetragen haben.

Wenn Lagrange sagt*), dass die Geometer des Alterthums zum Behuf der Construction der Tangente als allgemeines Princip zu Grunde gelegt hätten, dass die Tangente eine gerade Linie sei, die mit der Curve nur einen Punkt gemein habe, so dass keine andere gerade Linie durch diesen Punkt zwischen der Curve und Tangente gezogen werden könne, so ist diese Behauptung dahin zu beschränken, dass nur Euklid auf diese Weise die Tangente des Kreises bestimmt hat. Archimedes und Apollonius fassen die Tangente als eine gerade Linie, welche einen Punkt mit der Curve gemein hat, sonst aber ganz ausserhalb derselben liegt; sie setzen die Tangente zur Subtangente in Beziehung, so dass durch die letztere jene gefunden werden kann: ein Verfahren, das von Fermat, Hugens, de Sluze zur Bestimmung der Tangente mit grossem Erfolge angewandt worden ist.

Leibnizischen Manuscripten ergiebt sich nichts, was für diese Annahme spräche. Uebrigens ist möglich, dass Leibniz noch ein anderes Werk des Gregorius: *Curvilineorum amoenior contemplatio nec non examen circuli quadraturae, Lugd.* 1654. besessen, nach dem ich jedoch vergebens gesucht habe.

*) *Théorie des fonctions analytiques. Edit. nouv. p.* 165.

Erst in neuerer Zeit, in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts, versuchten fast gleichzeitig Roberval, Descartes, Fermat eine allgemeine Auflösung des Tangentenproblems. Es ist schon oben bemerkt worden, dass in den Untersuchungen Roberval's über Quadraturen ein Abdruck des tiefen Studiums der Geometrie des Alterthums gefunden wird; derselbe Geist weht auch in seiner Tangentenmethode. Nachdem nämlich dieser ausgezeichnete Geometer bei der mechanischen Beschreibung der Cycloide sich überzeugt hatte, dass jede krumme Linie durch die Bewegung eines nach zwei oder mehreren Richtungen angetriebenen Punktes beschrieben werden könne und dass die Richtung dieses Punktes in jedem Augenblick zugleich auch die Tangente für den entsprechenden Curvenpunkt sei, knüpft er an dieses Axiom die folgende allgemeine Regel zur Bestimmung der Tangenten*): Man untersuche mit Hülfe der gegebenen specifischen Eigenschaften der Curve die verschiedenen Bewegungen, welche der die Curve beschreibende Punkt an der Stelle hat, wo die Tangente gezogen werden soll; alle diese Bewegungen setze man in eine einzige zusammen, ziehe die Richtungslinie der zusammengesetzten Bewegung, so wird diese die Tangente der krummen Linie für den in Rede stehenden Punkt sein. Roberval war zwar von der Allgemeinheit dieses Princips völlig überzeugt**); er ist jedoch den Beweis dessel-

---

*) *Inventa infiniti doctrina, ego ad tangentes curvarum animum applicui. Ac primum vi analyseos methodum quandam reperi, quae etiamsi longe postea universalis esse deprehensa sit, tamen recens inventa talis non apparuit: quaerebam vero universalem et particulares methodos (ut adhuc) ubique dedignabar. At trochoides (cycloides) nostrae occasionem dederunt, cur ad motuum compositionem respicerem. Occasio talis fuit ac propositionem universalem tangentium inde deductam vulgavimus circa annum* 1636. Aus dem Briefe Roberval's an Torricelli. — Die Abhandlung, in der Roberval seine Tangentenmethode lehrt, hat den Titel: *Observations sur la composition des mouvemens et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes.* Sie findet sich in den *Divers Ouvrages de Mathémat. et de Physique par Messieurs de l'Académie royale des sciences. Paris* 1693. *Tom. I.*

**) *Hoc tamen eos (posteros) monebo, doctrinam de motuum compositione adeo universalem esse, ut nec analysi sola coërceatur, nec adjuncta infinitorum doctrina, cum rationalibus et irrationalibus, neque logarithmis quantitatibus; quippe haec omnia motus comprehendit, non ab ipsis compre-*

ben schuldig geblieben, und er vermochte es auch nur auf die Kegelschnitte mit Klarheit anzuwenden, indem für diese Curven die relativen Geschwindigkeiten des die Curve beschreibenden Punktes unmittelbar gegeben sind. Weniger gelang ihm die Darstellung der Tangenten der übrigen damals bekannten Curven, so dass die Herausgeber seiner Schriften über die Verwirrung und Undeutlichkeit in der Construction der Tangenten der Quadratrix, Conchoide u. s. w. laute Klagen führen. — Roberval's Tangentenmethode verdient gewiss alle Aufmerksamkeit, wenn man bedenkt, dass er zuerst die Behandlung eines geometrischen Problems in grösster Allgemeinheit unternahm und zwar nur mit Hülfe solcher Principien, deren Anwendung und Gültigkeit in der Geometrie durch die Geometer des Alterthums geheiligt war. Obgleich schon Archimedes bei der Construction der Spirale und Cavaleri zur Erzeugung der Körper und Flächen von der Bewegung Gebrauch gemacht hatten, so wird dadurch doch keineswegs Roberval's Verdienst geschmälert; denn der erstere Fall ist ein einzeln stehender und hatte keine weitern Folgen, während von Cavaleri die Bewegung in einem ganz andern Sinne angewandt wird. Dass Roberval über die Entstehung der Curven und über die Entdeckung ihrer Eigenschaften, welche in damaliger Zeit mit so grosser Vorliebe behandelt wurden, mittelst der Bewegung eine neue Bahn brach, sichert ihm eine ausgezeichnete Stelle in der Geschichte der Geometrie. —

Dadurch dass Descartes (1596 bis 1650) in ausgedehnterem Masse, als bisher geschehen, die Algebra in der Geometrie zur Anwendung brachte, gewann die letztere eine wesentlich neue Gestalt; es wurde nun möglich, die Eigenschaften der Curven durch allgemeine Formeln auszudrücken und diejenigen, deren Charakter übereinstimmend war, gemeinsam zu behandeln. Das erste allgemeine Problem und von Descartes selbst als seine schönste und wichtigste Erfindung geschätzt, war ein Verfahren, die Tangenten der einfachen Curven zu finden*). Die

---

henditur; hinc latissimis patet exercitationibus mathematicis campus idemque plus quam solidus. Aus dem letzten Corollarium zu der Abhandlung *de Trochoide.*

*) *Nec verebor dicere, problema hoc non modo eorum, quae scio, utilissimum et generalissimum esse, sed etiam eorum, quae in geometria scire unquam desideraverim. Cartes. Geomet. lib. II. p.* 40. *ed. Schooten.*

Bemerkung nämlich, dass wenn eine einfache Curve von einem Kreise in zwei Punkten geschnitten wird, bei dem allmähligen Zusammenfallen dieser beiden Punkte der Kreis die krumme Linie nur in einem Punkte berührt, mithin die Tangente des Kreises in diesem Punkte zugleich auch die der Curve ist, genügte ihm, sie als Princip eines Verfahrens, Tangenten an krumme Linien zu ziehen, aufzustellen. Die Mangelhaftigkeit und geringe Anwendbarkeit desselben ist jedoch leicht einzusehen.

Von bei weitem grösserer Bedeutung für die Entwickelung des Princips der höheren Analysis sind Fermat's analytisch-geometrische Untersuchungen. Die Grundlage derselben bildet seine berühmte Methode zur Bestimmung der Maxima und Minima*). Um eine genaue Darstellung des Wesens derselben zu geben, betrachten wir eine einfach gekrümmte Curve, bei welcher unmittelbar zu erkennen ist, dass die Ordinate y desjenigen Punktes, in welchem die Curve vom Wachsen zum Abnehmen fortgeht, die grösste in Bezug auf die zunächststehenden ist. Dieser Ordinate wird, wie jeder andern, ein Werth zukommen, der sich aus der charakteristischen Gleichung der Curve ergiebt und der im Allgemeinen eine Funktion der Abscisse x sein wird. Setzt man darin $x + e$ für x, wo e eine sehr kleine Grösse bezeichnet, so wird dieser letztere Ausdruck für y dem ersteren beinahe gleich sein**). In der so erhaltenen Gleichung unterdrückte Fermat die beiden Seiten gemeinschaftlichen Glieder, dividirte, um die Glieder der Gleichung homogen zu machen, durch die Grösse e so oft als möglich und liess die übrigbleibenden mit e noch behafteten Glieder weg als unendlichklein in Bezug auf die andern Grössen der Gleichung. Aus dem, was nun noch übrig war, erhielt er den Werth des Maximums. Es sei z. B. eine gegebene gerade Linie B so zu theilen, dass das Rechteck aus ihren beiden Theilen ein Maximum werde. Angenommen, die Aufgabe wäre gelöst und der eine Theil der gegebenen Linie $= A$, mithin der andere $= B - A$, so wird das Rechteck $(B - A) A$ das verlangte Maximum sein. — Zur weiteren Bestimmung von A für

*) *Fermat. op. var. math. p. 62 sqq.*

**) Fermat gebraucht hier das Wort *adaequare*, der Gleichheit nahe kommen, und beruft sich auf Diophant's (*ut loquitur Diophantus*) Methode der Annäherung oder der Beinahegleichheit. Vergl. Nesselmann, die Algebra der Griechen. Berlin 1842. S. 401.

den Fall des Maximums substituirt nun Fermat $A + e$ für A, und gewinnt, indem er die beiden Ausdrücke $(B - A)\,A$, $(B - (A + e))\,(A + e)$ gleichsetzt, die Gleichung

$$AB - A^2 = AB + eB - A^2 - 2Ae - e^2$$

$$\text{d. h.}\quad 0 = eB - 2Ae - e^2$$

$$\text{oder}\quad 0 = B - 2A - e,$$

$$\text{mithin}\quad 0 = B - 2A$$

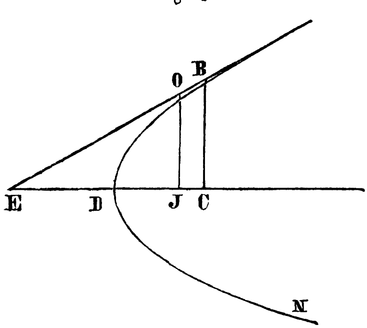
$$\text{woraus}\quad \tfrac{1}{2}B = A,$$

d. h. $(B - A)\,A$ wird ein Maximum sein, wenn A die Hälfte der gegebenen Linie B ist.

Die allgemeine Gültigkeit der Methode in solchen einfachen Beispielen, wie das vorhergehende, ist nicht zu verkennen; jedoch ist leicht zu sehen, dass, um mit Hülfe dieses Verfahrens in schwierigeren Fällen z. B. über das Maximum einer Curve zu entscheiden, noch andere Kunstgriffe nöthig sind. Zuerst wird eine ohngefähre Kenntniss des Maximums vorausgesetzt; alsdann wird aber noch eine besondere Discussion der Curve erfordert, um zu entscheiden, ob der gefundene Werth ein absolutes Maximum ist. Ferner entscheidet Fermat's Methode nicht, ob der gefundene Werth ein Maximum oder Minimum ist, was ebenfalls noch besonders aus der Natur der Curve ersehen werden muss.

Auf der eben betrachteten Methode *ad disquirendam maximam et minimam* beruht Fermat's Verfahren, Tangenten an krumme Linien zu ziehen. Da Fermat hierbei nicht von der allgemeinen Definition der Tangente ausgeht, sondern voraussetzt, dass die Tangente jedesmal die Axe der Curve schneidet, so wird es möglich, durch die Subtangente die Tangente zu bestimmen. Es sei z. B. BDN (Fig. 5.) eine Parabel, an welche im Punkte B eine Tangente gezogen werden soll. Fermat nimmt an, dass sie den Durchmesser der Curve im Punkte E schneidet, und sucht nun darzuthun, dass CE die erforderliche Eigenschaft als Subtangente der Parabel hat. Zu diesem Ende zieht er ausser der Ordinate BC des Berührungspunk-

Fig. 5.



tes B noch eine Senkrechte OJ von einem Punkte der Tangente in der Nähe des Punktes B auf die Axe; nun ist $CD : DJ > \overline{BC}^2 : \overline{OJ}^2$ mithin auch $> \overline{CE}^2 : \overline{JE}^2$. Diese Verhältnisse werden sich jedoch der Gleichheit nähern, je weniger der Punkt O von B entfernt ist, d. h. $\overline{OJ}^2$ wird mit $\overline{CB}^2$ oder, was dasselbe ist, $\overline{JE}^2$ mit $\overline{CE}^2$ zusammenfallen, wenn die Abscisse CD in die um eine unendlich kleine Grösse CJ verminderte Abscisse JD übergeht. Ist nun $CD = d$, $CE = a$, $CJ = e$, so wird $JD = d - e$ und $\overline{JE}^2 = (a-e)^2$, folglich $(d-e)a^2 = d(a-e)^2$, aus welcher Gleichung sich $a = 2d$ als richtiger Werth der Subtangente der Parabel ergiebt. Die Tangente des Punktes B schneidet als die Axe der Curve E und ist durch diese beiden Punkte bestimmt.

Dass diese Tangentenmethode Fermat's nicht allgemein und auf jeden Fall anwendbar ist, erhellt schon daraus, dass sie nicht von dem allgemeinen Begriff der Tangente ausgeht, sondern voraussetzt, dass die Tangente die Axe der Curve schneidet. Dessenohngeachtet haben bis auf die neueste Zeit die Coryphäen der französischen Mathematiker, Laplace, Lagrange, Fourier, Arago, dieselbe mit der durchaus allgemeinen, welche die Differentialrechnung bietet, in Parallele zu stellen gesucht, und Fermat als den eigentlichen Erfinder (*premier inventeur*) der Differentialrechnung betrachtet wissen wollen. Prüft man aber die Urtheile dieser ausgezeichneten Männer, so ergiebt sich merkwürdiger Weise, dass sie zugleich auch die Gründe enthalten, weshalb eben Fermat die Ehre der Erfindung durchaus abgesprochen werden muss. Laplace sagt*): *On voit, qu'il (Fermat) savait étendre sa methode aux fonctions irrationelles, en se débarrassant des irrationalités, par l'élévation des radicaux aux puissances*; und Lagrange**): *Il (Fermat) fait disparaître dans cette équation les radicaux et les fractions s'il y en a:* genug, um zu ersehen, dass Fermat's Methode sich an die Schwierigkeiten stösst, welche die Differentialrechnung mit einem Schlage überwindet. Wurzelgrössen und Brüche sind für die Differentialrechnung kein Hinderniss, dagegen muss Fermat, um sein Verfahren anwenden zu können, sie entweder vermeiden oder auf künstlichem Wege durch Operationen des niedern Cal-

---

*) *Traité des probabilités, introduct. p. XXX.*

**) *Leçons sur le calcul des fonctions p.* 321.

culs wegschaffen. Hierzu kommt noch, dass Fermat's Verfahren jedes durchgreifenden Algorithmus entbehrt und in den einzeln hingestellten Beispielen mehr als Funken eines grossen, scharfsinnigen Talents erscheint, als eine allgemein begründete Theorie*).

Keppler hatte die unendlich kleinen Grössen in die Geometrie des Alterthums eingeführt; dasselbe geschah durch Fermat in Bezug auf die Geometrie des Descartes. Man hat dies als sein vorzüglichstes Verdienst gepriesen; indess wird gewöhnlich dabei übersehen, dass die unendlich kleine Grösse nur das Mittel, gewissermassen der Algorithmus seiner Methode ist. Das eigentliche Fundament der Methode Fermat's bildet der Begriff der Gränze, den er aus den Schriften der Geometer des Alterthums entlehnte, und es ist namentlich ein Zeichen seiner eminenten Geisteskraft, dass er diesen Begriff mit der Geometrie des Descartes zu verbinden verstand.

Hugens (1625 bis 1695) und de Sluze (Canonicus zu Lüttich, 1623 bis 1685) versuchten die Regeln Fermat's zu erweitern und zu beweisen; ohne aber auf das Princip derselben näher einzugehen, haben sie nur Anweisungen gegeben, wie man aus der gegebenen Gleichung sogleich das verlangte Resultat erhalten könne, ohne Substitution von $x + e$ für x**). Desgleichen hat Hudde (1640 bis 1704) eine Regel zur Bestimmung der Tangenten und der Maxima und Minima gegeben, welche dasselbe in Bezug auf die Methode des Descartes bezweckte***).

---

*) Vergl. hierbei Newton's Leben von Brewster, übers. von Brandes und Goldberg S. 150, und Chasles' Geschichte der Geometrie, übers. von Sohncke S. 59, wo Poisson's weniger parteiisches Urtheil angeführt wird. Auch Genty in seiner Preisschrift: *De l'influence de Fermat sur la géometrie de son temps*, *Orléans* 1780, hat ein bestimmteres Urtheil über Fermat's Verdienste gefällt; desgleichen Bossut (*Histoir. des mathémat. ed. nouv. Tom. I. p.* 302.).

**) Die betreffenden Abhandlungen von Hugens finden sich in: *Divers Ouvrages de mathémat. et de physiq. par MM. de l'Académie roy. des scienc.* 1693. *Tom. I. p.* 327 *sqq.;* die von de Sluze in: *Transactions philos. an.* 1672 *und* 1673 *p.* 6059 *und p.* 5143.

***) *Hudden. epist. secund. ad Schooten in Cartes. Geom. ed. Schooten p.* 507 *sqq.*

Die Reihe der Versuche in Betreff einer allgemeinen Lösung des Tangentenproblems vor der Bekanntmachung der Differentialrechnung durch Leibniz beschliesst die Methode, welche Isaac Barrow*) (1630 bis 1677) in seinen *Lectionibus geometricis, Londin.* 1672, gegeben hat. Um das Wesen derselben zu verstehen, ist es nöthig, darauf zurückzugehen, wie Barrow die geometrischen Grössen, namentlich Curven, entstehen lässt. Cavaleri dachte sich die Ebenen und Körper, um zu ihrer Quadratur und Cubatur zu gelangen, durch Bewegung erzeugt; Barrow, durchdrungen von der Zuverlässigkeit der Methode Cavaleri's**), welche er gegen die Angriffe Tacquet's vertheidigt (*Lect. II. p.* 21) bildet die Curven durch die Bewegung eines nach zwei oder mehreren Richtungen angetriebenen Punktes***) und versucht dadurch, dass er die Richtung und die Geschwindigkeit der Bewegung in Betracht zieht, die Eigenschaften der Curven zu ermitteln†). Deshalb handelt er auch in seinen ersten Vorlesungen mit grosser Ausführlichkeit über die verschiedenen Arten der Bewegung, über das gegenseitige Verhältniss von Geschwindigkeit und Zeit und über ihre Anwendung zur Erzeugung geometrischer Grössen, namentlich von Curven. In der vierten Vorlesung definirt Barrow den Begriff der Tangente folgendermassen: Wenn die Geschwindigkeit eines

---

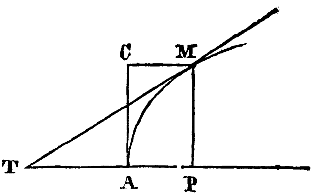
*) Professor der Mathematik an der Universität Cambridge, Newton's Lehrer und Freund, zu dessen Gunsten er im Jahre 1669 auf seinen Lehrstuhl verzichtete.

**) *Caeterum praetermittenda non est animadversio quaedam perquam utilis et necessaria circa modum Superficierum et Solidorum hoc modo resultantium dimensiones investigandi juxta methodum indivisibilium, omnium expeditissimam, et modo rite abhibeatur haud minus certam et infallibilem. Lect. II.*

***) *Omnis in uno plano constituta linea procreari potest e motu parallelo rectae lineae et puncti in ea, omnis superficies e motu parallelo plani et lineae in eo (lineae scilicet alicujus e rectis modo jam insinuato motibus progenitae) consequenter et linea quaevis etiam in curva superficie designata rectis motibus effici potest. Lect. III.*

†) ***Propositum est nobis e compositione motuum emergentes linearum affectiones indagare ac exponere.*** Anfang von ***Lect. IV.***

Fig. 6.

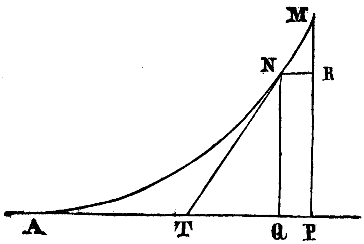


Punktes A, welcher eine Curve beschreibt, in irgend einem Curvenpunkt M der Geschwindigkeit gleich ist, mit welcher ein Punkt T eine Gerade TP in der Zeit PM oder AC gleichförmig durchläuft (oder wenn die Geschwindigkeit des die Curve beschreibenden Punktes in M sich verhält zu der Geschwindigkeit des von T nach P sich bewegenden Punktes T wie TP zu PM) so wird die Gerade TM die Curve im Punkte M berühren. Es ist leicht zu sehen, dass die auf diese Bestimmung gegründete Methode nicht allgemein sein kann und für jede einzelne Curve besondere Kunstgriffe verlangt, da die Tangente von der eigenthümlichen Bewegung des die Curve beschreibenden Punktes abhängig gemacht wird. Dadurch jedoch, dass Barrow von dieser Auffassung der Tangente ausging, wurde er auf die Betrachtung des Dreiecks geführt, das von der Tangente, der Subtangente und der Ordinate des Berührungspunktes gebildet wird, und da er, getreu den Vorstellungen Keppler's und Cavaleri's, einen unendlich kleinen Curventheil als eine gerade Linie annahm*), so dass also die Tangente mit einem solchen Curvenstücke zusammenfiel, erhielt er das später sogenannte differentiale Dreieck (auch *triangulum characteristicum* genannt) zwischen einem solchen Curvenstücke, der Abscisse und Ordinate des Berührungspunktes, welches dem aus der Tangente, Subtangente und Ordinate des Berührungspunktes gebildeten Dreieck ähnlich ist. Auf die Betrachtung dieses unendlich kleinen Dreiecks gründet sich denn auch die algebraisch-geometrische Tangentenmethode Barrow's, die demnach in dem innigsten Zusammenhang mit dem obigen rein geometrischen Verfahren steht. Barrow giebt für dieselbe am Schluss der zehnten Vorlesung folgende Regeln: Es seien

---

*) *Sit curva quaevis (vel e rectis angulos efficientibus composita, quae curvae quoque nomen merito ferat; Archimedes saltem e rectis compositas lineas uti figurarum circulis inscriptarum aut adscriptarum perimetros, καμπυλῶν γραμμῶν nomine complectitur; ut et vicissim curvae quaevis lineae censeri possunt e rectis, innumeris quidem illis indefinite parvis, adjacentibus et deinceps secum angulos efficientibus, conflatae) etc. Lect. II.*

Fig. 7.



die Geraden AP, PM (von welchen PM die in Rede stehende Curve im Punkte M schneidet) der Lage nach gegeben, und es möge die Linie MT die Curve im Punkte M berühren und in T die Gerade AP schneiden. Um nun die Grösse der Geraden PT zu finden, nimm das Curvenstück PT unendlich klein, ziehe $NQ \parallel MP$, $NR \parallel AP$ und setze $MP = m$, $PT = t$, $MR = a$, $NR = e$. Alsdann bilde zwischen MR, NR eine Gleichung, aus welcher das Verhältniss von MP und PT sich ergeben wird. Hierbei sind folgende Rechnungsregeln zu beobachten: Zuerst werden alle Glieder, in denen Potenzen von a oder e oder Produkte aus a und e vorkommen, weggeworfen (*etenim isti termini nihil valebunt*) desgleichen alle Glieder, in welchen weder a, noch e enthalten ist (*etenim illi termini semper, ad unam aequationis partem adducti, nihilum adaequabunt*); in der übrigbleibenden Gleichung wird m für a, t für e gesetzt, wodurch sich der Werth von PT ergiebt. *Quodsi*, fügt Barrow noch hinzu, *calculum ingrediatur curvae cujuspiam indefinita particula, substituatur ejus loco tangentis particula rite sumpta vel ei quaevis (ob indefinitam curvae parvitatem) aequipollens recta.*

Barrow's Methode unterscheidet sich von der Fermat's wesentlich dadurch, dass der erstere jede Curve als ein Polygon von unendlich vielen Seiten und die Tangente der Curve als mit einer solchen Polygonseite zusammenfallend betrachtet; dass er ferner nicht, wie Fermat, zwei ungleiche Verhältnisse annimmt, die sich einer bestimmten Gränze nähern, sondern aus dem Dreieck zwischen einem unendlich kleinen als Tangente angenommenen Curvenstücke, der Ordinate und Abscisse des Berührungspunktes auf das Verhältniss der Ordinate zur Subtangente zurückschliesst. Dagegen liegt beiden Methoden die Annahme zu Grunde, dass die Tangente in jedem Falle die Axe der Curve schneidet, und dass also mit Hülfe der Subtangente die Tangente bestimmt wird. Dies sowohl, als auch dass die Rechnungsoperationen ebenfalls nur auf ganze rationale Funktionen sich unmittelbar anwenden lassen, bildet die theilweise Uebereinstimmung der Methoden Barrow's und Fermat's.

In dem grossen Streite über den ersten Erfinder der Differentialrechnung ist Leibniz der Vorwurf gemacht worden, dass er seine Methode, Tangenten zu ziehen, an welcher er bekanntlich den Mechanismus der Differentialrechnung erläuterte, von Barrow entlehnt habe. Ja man ging noch weiter; indem man durch eine merkwürdige Verwechselung irregeleitet, Leibnizens Tangentenmethode als das Fundament der Differentialrechnung betrachtete, entstand die Meinung, es müsse der Ursprung der Differentialrechnung auf Barrow zurückgeführt werden. Leibniz hat aber die Unzulässigkeit dieser ziemlich deutlich ausgesprochenen Beschuldigung eines Plagiats stets nachgewiesen; in einem Briefe an den Marquis de l'Hospital sagt er ausdrücklich*): *Je reconnois que M. Barrow est allé bien avant, mais je puis vous assurer, Monsieur, que je n'ay tiré aucun secours pour mes methodes*; und an einer andern Stelle desselben Schreibens: *Comme j'ay reconnu publiquement, en quoy j'estois redevable à M. Newton, j'en aurois fait autant à l'egard de M. Barrow, si j'y avois puisé.* Wir können diese Aussage noch auf eine andere Weise erhärten. Wir haben auf der Königlichen Bibliothek in Hannover das Exemplar von *Barrow's Lectiones geometricae*, welches Leibniz gehörte, eingesehen; in demselben hat er zu Anfang der *Lect. XI*, in der von dem umgekehrten Tangentenproblem die Rede ist, bemerkt: *Novi dudum*; desgleichen finden sich auf der zu dieser Vorlesung gehörenden Figurentafel von seiner Hand mehrere mathematische Formeln, in welchen das Integralzeichen in seiner ursprünglichsten Gestalt $\overline{\int}$ vorkommt. Dies kann wohl als Beweis angesehen werden, dass Leibniz erst nach Entdeckung des Algorithmus der höheren Analysis Barrow's Schrift studirte.

Das sind die Grundzüge der Theorien und Methoden, welche zur Behandlung der Quadraturen und Cubaturen, so wie zur Lösung des Tangentenproblems vor der Erfindung des Algorithmus der höheren Analysis im Gebrauch waren und die zur Entdeckung desselben wesentlich beigetragen haben. Durchmustern wir noch einmal den zurückgelegten Weg,

*) Leibnizens math. Schriften Bd. II. S. 259. 260.

so beweist die hier gegebene Entwickelung, dass der Ursprung der höheren Analysis in dem von den Geometern des griechischen Alterthums, namentlich von Archimedes aufgestellten Verfahren zur Lösung der Probleme der Quadratur und Cubatur gefunden wird. Dies Verfahren, welchem der Begriff der Gränze geometrisch gefasst zu Grunde liegt, wurde beim Wiederaufleben der mathematischen Studien im 16. und 17. Jahrhundert seiner ursprünglichen Strenge nach und nach entkleidet und mit Vorstellungen vermischt, welche den Anforderungen der Wissenschaft zuwider sind. Doch dieser Uebergang war gewissermassen nothwendig, damit Cavaleri ein allgemeines, wenn auch nicht immer zuverlässiges Verfahren schaffen konnte, das die Entdeckung des Algorithmus der höheren Analysis vermittelte. Auf der andern Seite folgte man diesen Abweichungen um so williger, als sie einen äusserst bequemen Weg darboten, das gewünschte Resultat zu erhalten, während man die Ueberzeugung hatte, dass vorkommende Irrthümer, zu denen die unsichere Methode führen konnte, durch eine Prüfung mittelst des vollkommen zuverlässigen Archimedeischen Verfahrens gefunden und beseitigt werden konnten; wir haben es geflissentlich hervorgehoben, dass den Geometern, welche diese leichteren und bequemeren Methoden schufen, dieser Gedanke stets vorschwebte. So kam es, dass man durch eben jene leicht anwendbaren Methoden von einer Menge von Resultaten, die gegenwärtig allein durch die höhere Analysis gewonnen werden, bereits Kenntniss hatte; es fehlte nur noch das Mittel, diese Einzelheiten unter einem Gesichtspunkt zusammenzufassen: eine gut gewählte, leicht verständliche Bezeichnungsweise. Eine solche verdanken wir Leibniz, welcher auf den glücklichen Gedanken kam, den wörtlichen Ausdruck in dem Cavalerischen Verfahren durch ein Zeichen, das Summenzeichen, darzustellen; das Differentialzeichen ergab sich durch den Gegensatz gewissermassen von selbst. —

Welcher Nutzen erwächst der Wissenschaft aus dieser historischen Entwickelung? — Es wird der Weg gezeigt, auf welchem die sichere Begründung des Fundaments der höheren Analysis naturgemäss zu suchen ist. Man hatte zwar zur Zeit der Entdeckung des Algorithmus der höheren Analysis den Pfad nicht verloren — das lehrt deutlich die geschichtliche Entwickelung — die Rückkehr zu der lauteren Quelle war aber mit zu vielen Schwierigkeiten verknüpft, welche dadurch noch um ein Erhebliches wuchsen, dass der Begriff, welcher zur Sicherstellung des Princips nöthig war, aus einzelnen geometrischen Theoremen herausgenommen, des an ihm haftenden Unwesentlichen entkleidet und vollkommen allgemein gefasst werden musste, so wie es das in der That staunenswerthe Gebäude der höheren Analysis verlangt. Weder Leibniz, noch Newton haben etwas Genügendes in dieser Hinsicht für ihre Schöpfungen gethan; ihre Nachfolger versuchten auf mehrfache Weise diesen Mangel zu ersetzen, ohne jedoch den strengen Anforderungen der Wissenschaft gegenüber Befriedigendes zu leisten. Erst in neuerer Zeit hat man erkannt, dass die Theorie der Gränzen das einzige dazu geeignete Mittel darbietet, und hat die Wissenschaft darauf aufgebaut. Indess sind noch nicht alle Ansprüche zufrieden gestellt; namentlich ist der Einwand erhoben worden, es sei diese Theorie zu schwierig und zu dunkel, als dass sie von Anfängern beim Studium der höheren Analysis klar und bestimmt gefasst werden könnte. Der Wissenschaft gegenüber verdient derselbe keine weitere Berüksichtigung; eine sorgsamere, mehr methodische Bearbeitung der Lehre von den Gränzen, als ihr bisher zu Theil geworden ist, wird auch diese Klippe zu umschiffen und die dunkeln Wolken zu zerstreuen wissen.

Die Entdeckung

des

Algorithmus der höheren Analysis

durch Leibniz.

Die Entdeckung des Algorithmus der höheren Analysis durch Leibniz.

Um die Entdeckung des Algorithmus der höheren Analysis durch Leibniz in das rechte Licht zu setzen, ist es nöthig, einen Blick auf den gesammten mathematischen Bildungsgang Leibnizens zu werfen.*)

Leibniz wurde durch logische Untersuchungen zum Studium der Mathematik geführt und fasste frühzeitig, von der Evidenz der Wissenschaft ergriffen, eine entschiedene Vorliebe für die mathematischen Disciplinen. Leider lag das Studium der Mathematik um die Mitte des 17. Jahrhunderts auf den Universitäten Deutschlands so darnieder, dass er fast ohne alle Anleitung und Unterweisung die Elemente der Wissenschaft aus Büchern, wie sie der Zufall ihm in die Hände spielte, sich aneignen musste. So geschah es, dass Leibniz vor seinem Aufenthalt in Paris nur mit den Anfängen der Wissenschaft vertraut wurde und ihm die Entdeckungen und Erweiterungen, womit im Laufe des 17. Jahrhunderts die berühmten Geometer Frankreichs, Englands und Italiens die mathematischen Disciplinen bereichert hatten, grösstentheils unbekannt blieben; dazu kam, dass er damals die Rechtswissenschaft und das Studium der Geschichte als seine Lebensaufgaben betrachtete und deshalb die Mathematik nur als eine Nebenbeschäftigung trieb, ohne besondern Fleiss darauf zu verwenden. Trotz ihres geringen Umfangs wurden jedoch diese mathematischen Studien für

*) Vergl. meine Schrift: Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz. Halle 1848.

Leibniz von der höchsten Bedeutung, insofern er stets die Verbindung derselben mit logischen Untersuchungen fest im Auge behielt und dadurch eine besondere Uebung erlangte, Begriffe durch allgemeine Zeichen auszudrücken. Seine erste mathematisch-philosophische Schrift: *De arte combinatoria*, *Lips.* 1666, trägt namentlich diesen Charakter, und Leibniz selbst hat in der Zeit, als der Streit über den ersten Entdecker der Differentialrechnung entbrannte, wiederholt darauf hingewiesen. Ausserdem ist dieser erste Jugendversuch für die Würdigung von Leibnizens Leistungen auf dem Gebiet der mathematischen Disciplinen nicht minder deshalb von Erheblichkeit, als sich schon darin die Methode ausgeprägt findet, auf der alle seine mathematischen Untersuchungen basirt sind, durch eine scharfe logische Auffassung die Lösung mathematischer Probleme zu bewirken.

Für Leibnizens ferneren mathematischen Bildungsgang ist sein Aufenthalt in Paris, wohin er im März des Jahres 1672 abging, Epoche machend. Leibniz kam hier zuerst mit Männern in Berührung, die vollkommen auf der Höhe der Wissenschaft standen und zu ihrer Erweiterung selbst beigetragen hatten. Namentlich machte er die Bekanntschaft des berühmten Hugens, der auf Einladung Ludwig's XIV. seit 1666 als eine Hauptzierde der Akademie und höchste mathematische Autorität in Paris lebte. Es konnte nicht fehlen, dass derselbe sehr bald das ausserordentliche Talent des jungen aufstrebenden Mannes erkannte, und es bildete sich fortan zwischen beiden das Verhältniss des Lehrers zum Schüler. Hugens gab damals gerade sein ausgezeichnetes Werk: *Horologium oscillatorium*, heraus, und machte Leibniz ein Exemplar zum Geschenk. Hieraus ersah Leibniz, wie sehr er noch Laie in seiner Lieblingswissenschaft war; sein Eifer, das bisher Versäumte nachzuholen, entbrannte aufs höchste. In ihren wissenschaftlichen Unterhaltungen kamen sie auf die Eigenschaften der Zahlen; vielleicht um das Talent seines neuen Schülers zu prüfen, legte ihm Hugens folgendes Problem vor: die Summe einer abnehmenden Reihe von Brüchen zu finden, deren Zähler sämmtlich $= 1$, deren Nenner die Triangularzahlen sind. Leibniz fand das richtige Resultat, dass nämlich die Summe dieser Reihe $= 2$ ist.

Leibnizens Umgang mit Hugens und seine mathematischen Studien wurden jedoch bald durch eine Reise nach London im Januar des Jahres

1673 unterbrochen. Ebenso wie in Paris suchte er auch hier die berühmten Männer Englands, die in der Hauptstadt lebten, kennen zu lernen. Mit Oldenburg, dem Secretär der Londoner Societät, stand er schon seit dem Jahre 1670 in Correspondenz. Bei dem Chemiker Boyle traf er mit dem Mathematiker Pell zusammen. Das Gespräch kam auf die Eigenschaften der Zahlen und Leibniz erwähnte, dass er eine Methode besitze, Zahlreihen mit Hülfe ihrer Differenzen zu summiren. Als er sich näher darüber aussprach, entgegnete ihm Pell, dass dieses Verfahren sich schon in einem Buche Mouton's: *De diametris apparentibus Solis et Lunae,* fände. Leibniz hatte dieses Werk bisher nicht gekannt; er lieh es sich eilends von Oldenburg, durchlief es und fand zu seiner Genugthuung, namentlich um den Verdacht eines Plagiats von sich abzuwehren, dass Mouton auf andere Weise zu demselben Resultat gelangt war, und dass seine Methode allgemeiner sei.*) — Durch Pell wurde Leibniz auch auf Mercator's *Logarithmotechnia,* aufmerksam gemacht, besonders wegen der darin enthaltenen Quadratur der gleichseitigen Hyperbel, und er nahm diese Schrift mit sich nach Paris. Nach seiner Rückkehr begann er unter Hugens' Anleitung mit dem lebhaftesten Eifer das Studium der höheren Mathematik in ihrem ganzen Umfange von neuem. Die Geometrie des Descartes, die er bisher nur sehr oberflächlich kannte, die *Synopsis Geometrica* des Honoratus Fabri, die Schriften des Gregorius a S. Vincentio, die Briefe Pascal's über die Cycloide waren seine Führer. In einem Manuscript vom August 1673 mit der Ueberschrift: *Methodus nova investigandi Tangentes linearum curvarum ex datis explicatis, vel contra Applicatas ex datis productis, reductis, Tangentibus, perpendicularibus, secantibus*, beginnt Leibniz sogleich mit dem Versuch, ein auf jede Curve anwendbares Verfahren für die Bestimmung der Tangente derselben zu finden.**) Er betrachtet die Curve als

---

*) Siehe das Schreiben Leibnizens an Oldenburg vom 3. Februar 1673. Leibnizens mathematische Schriften Bd. 1. S. 24 ff.

**) *Quodsi figura Geometrica non est*, sagt Leibniz mit Bezug auf die Eintheilung der Curven, die Descartes für seine Tangentenmethode zu Grunde gelegt hatte, *ut Cyclois, nil refert, tractabitur enim ad Geometricae exemplum fingendo rectarum cum curvis, ex quibus factae sunt, notam nobis esse com-*

ein Polygon von unendlich vielen Seiten und construirt schon hier das von ihm sogenannte *triangulum characteristicum* zwischen einem unendlichkleinen Bogen der Curve, der Differenz der Ordinaten und Abscissen, das dem Dreieck zwischen Tangente, Subtangente und Ordinate des Berührungspunktes ähnlich ist. Ebenso wie Descartes will nun Leibniz mittelst der Subtangente die Tangente finden; er bezeichnet die unendlich kleine Differenz der Abscissen mit *b*, und überzeugt sich an der Parabel, dass sein Verfahren zu einem richtigen Resultat führt, wenn die Glieder der Gleichung, in welcher die unendlichkleinen Grössen vorkommen, vernachlässigt werden. Ueber die Vernachlässigung dieser Glieder scheint jedoch Leibniz unsicher zu sein*), und er sucht auf einem andern Wege zur Bestimmung der Subtangente zu gelangen. *Tota quaestio est,* lauten seine eigenen Worte, *quomodo ex differentiis duarum applicatarum ipsae inveniri queant applicatae;* er findet, dass die Lösung dieses Problems auf der Summation einer Reihe beruht, deren Glieder aus den Differenzen der auf einander folgenden Abscissen bestehen. Gegen Ende des Manuscripts kommt Leibniz auf das umgekehrte Problem zu sprechen: *Regressus,* sagt er, *an haberi possit a Tangentibus aut aliis functionibus ad ordinatas, quaestio est magna. Res est accuratissime investiganda, per Canones aequationum, ut appareat quot modis aliquid produci possit ex aliis aequationibus, et quaenam postea ex illis eligi debeat. Est quaedam ipsius Analyseos Analysis, sed in qua profecto consistit Apex scientiae humanae, in hoc quidem genere rerum.* — Zuletzt hat Leibniz folgendes Resultat gewonnen: *Duae quaestiones, una de invenienda descriptione curvae ex ejus elementis, altera de invenienda figura ex datis differentiis, altera redigi potest in eandem. Hinc intelligi potest fere totam doctrinam de methodo tangentium inversa revocabilem videri ad quadraturas.* Demnach ist Leibniz bereits um die Mitte des Jahres 1673 zu der Erkenntniss gelangt, dass das directe und das sogenannte umgekehrte Tangentenproblem in einem

---

parationem; nec ideo minus Tangens sive Geometrica sive ageometrica ducetur, prout figurae natura patitur.

*) Seine Worte sind: *Non est tutum, ipsius infinite parvi b multiplos (sic!) ab initio rejicere, aliaque, fieri enim potest, ut eorum cum aliis compensatione in alium plane statum veniat aequatio.*

gewissen Zusammenhange stehen; er ahnt, dass das letztere sich auf Quadraturen (d. h. auf Summationen) zurückführen lässt. In einem Manuscript vom October 1674, überschrieben: *Schediasma de Methodo Tangentium inversa ad circulum applicata*, kommt er darüber zur Gewissheit; *ajo*, sagt er, *ex Methodo Tangentium inversa sequi figurarum omnium quadraturas, atque ita scientiam de summis et quadraturis, quod ante a nemine ne speratum est quidem, analyticam reddi posse.*

Nachdem Leibniz also die Identität zwischen dem umgekehrten Tangentenproblem und der Quadratur der Curven erkannt, wandte er sich zur Untersuchung der Methoden, die man bisher zur Bewirkung von Quadraturen aufgestellt hatte, um vielleicht auf diesem Wege zu einer allgemeinen Lösung des umgekehrten Tangentenproblems zu gelangen. In einer sehr umfangreichen Abhandlung vom October 1674, überschrieben: *Schediasma de Serierum summis, et seriebus quadratricibus*, betrachtet Leibniz zunächst das damals gewöhnlichste Verfahren, durch Summation von Reihen Quadraturen zu erhalten. Er geht von der Reihe $\frac{b}{1} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5} - \ldots$ aus und findet folgende allgemeine Regeln: *Appellando*, sind seine Worte, *ordinatas inconstantes x, abscissas inconstantes y, abscissam b maximae ordinatae e, abscissam d minimae ordinatae h, fient regulae*:

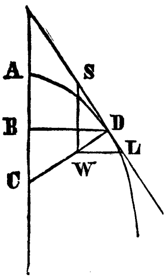
$$\frac{x^2}{2} = ywx - \frac{yw^2}{2} + \frac{d^2h}{2},$$

$$\frac{h^2w}{2} + \frac{d^2h}{2} = xy - \frac{x}{2}, \quad e - h = w,$$

$$xw = \frac{e^2}{2} - \frac{w^2}{2},$$

$yw = x$ in decrescentibus, nam in ascendentibus seu in crescentibus $yw = eb - x$. Variandae, fügt Leibniz hinzu, *hae regulae nonnihil, prout series crescunt aut decrescunt; item omitti poterit mentio minimae ordinatae, intelligendo eam semper esse ultimam*; *w contra ubique inseri etiam potest, ubi ipsarum w mentio est. Omnes series hactenus inventae per unam ex his regulis habentur, exceptis seriebus potestatum, quae habentur per differentias exhaustas.* In derselben Abhandlung erwähnt Leibniz folgende wahrscheinlich schon früher gefundene allgemeine Lehrsätze: $\frac{BC}{BD} = \frac{WL}{SW}$

Fig. 8.



(Fig. 8) *erit BC* $\frown$ *SW seu summa omnium BC aequalis BD* $\frown$ *WL seu summae omnium BD ad basin; summa autem omnium BD ad basin est ipsius maximae BD semiquadratum. Porro manifestum est, summam omnium WL esse ipsam maximam BD.* — Nachdem Leibniz sich ferner noch überzeugt hatte, dass die Methode Descartes', durch eine Hülfsgleichung mit zwei gleichen Wurzeln das umgekehrte Tangentenproblem allgemein zu lösen, nicht ausreiche*), prüft er in einem Manuscript**), das an den Tagen 25. Octob., 26. Octob., 29. Octob., 1. Novemb. 1675 geschrieben ist, die übrigen Methoden zur Quadratur, und zwar zuerst die mittelst der Guldinschen Regel; er findet, dass das Princip derselben darin besteht, dass wenn die Relation einer Figur rücksichtlich dreier unter einander nicht parallelen Drehungsaxen gegeben ist, die Fläche sowohl als der Schwerpunkt derselben gefunden werden kann. Darauf erwähnt Leibniz kurz die andern Methoden zur Quadratur: Zerlegung der Figur in quadrirbare Theile, Zurückführung der Quadratur einer gegebenen Figur auf eine andere bereits bekannte, und führt alsdann den folgenden schon früher gefundenen Satz an: *Differentiarum momenta ex perpendiculari ad axem aequantur complemento summae terminorum, sive: Momenta Terminorum aequantur complemento summae summarum*, oder in Zeichen: $omn.\ \overline{xw} \sqcap ult.\ x\ \overline{omn.\ w} - omn.\ \overline{omn.\ w}$. Dies ist eine der ersten Gleichungen, in welcher Leibniz in der Fortsetzung dieser Untersuchung am 29. Octob. 1675 das Summen- oder Integralzeichen zur Anwendung bringt. — In dieser Fortsetzung bespricht Leibniz anfangs das Verfahren, zu einer analytisch gegebenen Figur eine Quadratrix zu finden, d. h. die Quadratur einer gegebenen Curve auf eine andere bereits bekannte zurückzuführen. Im Verlauf der Untersuchung kommt er darauf, wie man sich bei der Multiplication solcher Ausdrücke, wie *omn. x*, *omn. y* zu verhalten habe. Er macht die Annahme — und das ist, wie es scheint,

*) In einem Manuscript vom Jan. 1675 sagt Leibniz: *Ita tandem inani spe inveniendi per duas radices aequales serierum summas et figurarum quadraturas sum liberatus, rationemque detexi cur sic ratiocinari non liceat, quod me diu satis vexavit.*

**) Siehe Beilage II.

der Angelpunkt der Entdeckung — einen solchen Ausdruck, wie *omn. y*, als eine unendlichkleine Linie aufzufassen, und dadurch wird es ihm möglich, dergleichen Ausdrücke mit den Seiten des *triangulum characteristicum* in Beziehung zu setzen. So gewinnt Leibniz den Satz: $\frac{\overline{omn.\,l}\,\boxed{2}}{2} \sqcap omn.\,\overline{\overline{omn.\,l}\,\frac{l}{a}}$, wo l die Ordinate der Curve bezeichnet, und stellt damit den schon oben erwähnten: $omn.\,\overline{xl} \sqcap x\,.\,\overline{omn.\,l} - omn.\,\overline{omn.\,l}$ zusammen. Ohne sich nun näher darüber auszusprechen — offenbar aber um die Ausdrücke einfacher und übersichtlicher zu machen und um eine bestimmt hervortretende Bezeichnung zu haben — führt Leibniz das Summen- oder Integralzeichen ein, mit den Worten: *Utile erit scribi* $\int$ *pro omn., ut* $\int l$ *pro omn. l, id est summa ipsarum l. Itaque fiet* $\frac{\int \overline{l^2}}{2} \sqcap \int \overline{\int \overline{l}\,\frac{l}{a}}$ *et* $\int \overline{xl} \sqcap x \int \overline{l} - \int \overline{\int \overline{l}}$, und da er schon vorher erwähnt hat, dass *omn. l* oder $\int l$ eine jede beliebige Grösse sein kann, so findet er sogleich $\int x \sqcap \frac{x^2}{2}$, $\int x^2 \sqcap \frac{x^3}{3}$, und wenn a und b Constante bezeichnen, $\int \overline{\frac{a}{b} l} \sqcap \frac{a}{b} \int l$. Mit Recht ruft Leibniz aus: *Satis haec nova et notabilia, cum novum genus calculi inducant!* Im Vorhergehenden hatte er bereits bemerkt: *Si analytice detur* $\int l$, *dabitur etiam l;* jetzt kommt er auf das Umgekehrte: *Datur l, relatio ad x, quaeritur* $\int l$. *Quod fiet jam*, setzt er mit wahrhaft schöpferischem Geiste hinzu, *contrario calculo, scilicet si sit* $\int l \sqcap ya$, *ponemus* $l \sqcap \frac{ya}{d}$, *nempe ut* $\int$ *augebit, ita d minuet dimensiones,* $\int$ *autem significat summam, d differentiam. Ex dato y semper invenitur* $\frac{ya}{d}$ *sive l sive differentia ipsorum y.* —

Dieses „*novum calculi genus*,“ die neu gewonnenen Resultate mussten auf Leibniz einen tiefen, nachhaltigen Eindruck hinterlassen, und es darf nicht befremden, dass er mit Hülfe dieser neuen Ergebnisse einen Versuch zur Lösung derjenigen Probleme machte, welche damals als die schwierigsten der ganzen Geometrie betrachtet wurden und zu deren Behandlung keine Hülfsmittel vorhanden waren. Es waren dies die Probleme, die gewöhnlich unter dem Namen des umgekehrten Tangentenproblems zusammengefasst wurden. In einem Manuscript vom 11. November 1675 mit der Aufschrift: *Methodi tangentium inversae exempla**), legt Leibniz sich zuerst das folgende Problem vor: diejenige Curve zu finden, in welcher die Theile der Axe zwischen Ordinate und Normale eines Curvenpunktes den Ordinaten selbst reciprok proportional sind. Er findet, dass die gesuchte Curve die cubische Parabel ist. Ueberrascht durch das Resultat prüft Leibniz die Richtigkeit desselben rückwärts mittelst der Tangentenmethode de Sluze's und überzeugt sich so, dass seine neue Bezeichnungsweise zu einem richtigen Ziele geführt hat. Mit dieser festen Basis geht Leibniz sogleich zu schwierigern Problemen über. Da ist es in der That bewunderungswürdig zu sehen, wie Leibniz lediglich mittelst der Fundamentalbeziehung zwischen Summe und Differenz die Lösungen herbeiführt und zugleich zu den einfachsten Lehrsätzen der Differential- und Integralrechnung gelangt, dass z. B. $\int ydy = \frac{y^2}{2}$, $ydy = d\frac{y^2}{2}$. Bei der Untersuchung des Problems: die Curve zu finden, bei welcher sich die Abschnitte der Axe bis zu den Fusspunkten der Normalen wie die Ordinaten verhalten, lässt Leibniz die Abscissen x in arithmetischer Progression fortschreiten; er gewinnt dadurch die Vorstellung, dass dx eine Constante wird. Hierbei kommt er denn auch darauf — vielleicht durch die Annahme der arithmetischen Progression geleitet — für die bisherige Bezeichnungsweise des Differentials $\frac{x}{d}$ die fortan übliche dx zu setzen. — Die ganze Untersuchung bleibt unberührt von der Frage, als was für Grössen und von welcher Beschaffenheit die dx und die dy zu betrachten

*) Siehe Beilage III.

sind.*) Es kommt Leibniz nur darauf an, zu erforschen, welche Veränderung mit einem Ausdruck vorgeht, wenn derselbe einem der Zeichen $\int$ oder d unterworfen wird. Daher legt er sich auch gegen das Ende der Untersuchung die Frage vor: *Videndum an* $dxdy$ *idem sit quod* $d\overline{xy}$, *et an* $\frac{dx}{dy}$ *idem quod* $d\frac{x}{y}$, und er überzeugt sich, dass $dxdy$ etwas anderes ist als $d\overline{xy}$, und ebenso dass $\frac{dx}{dy}$ nicht mit $d\frac{x}{y}$ gleiche Bedeutung hat.

Dies ist die Entstehung der Bezeichnungsweise, welcher die höhere Analysis ihr Wachsthum und die staunenswerthe Vervollkommnung zu verdanken hat — und der 29. October 1675 der denkwürdige Tag, an dem sie ihren Ursprung nahm. Die Wichtigkeit der Sache erfordert, dass wir einen Augenblick verweilen, um diesen bedeutungsvollen Moment recht zu würdigen. — Durch Keppler's kühne Anschauungen und durch die *Methodus indivisibilium* Cavaleri's waren Hülfsmittel geschaffen worden, um Probleme aus der höheren Geometrie mit grösserer Leichtigkeit, als bisher, zu behandeln; dazu hatte Wallis in der *Arithmetica infinitorum* gezeigt, wie die durch Vieta und Descartes eingeführte allgemeine Bezeichnung der räumlichen Grössen zur Untersuchung der Quadraturen und Cubaturen gebraucht werden könnte. Hierdurch war es gelungen, eine Menge einzelner Resultate zu erzielen, die gegenwärtig durch die höhere Analysis gewonnen werden; aber es fehlte ein gemeinsames Band, welches sie alle aus ihrer Isolirtheit befreite und unter einem Gesichtspunkt vereinigte. Dies bewirkte die naturgemässe, so höchst glückliche Bezeichnungsweise, die wir Leibniz verdanken, mit einem Schlage. Von allen grossen Mathematikern der folgenden Zeit ist einstimmig bekannt worden, dass der Leibnizische Algorithmus die überraschend schnellen Fortschritte in der Erweiterung und Anwendung der höheren Analysis hervorgerufen und den Ausbau des wahrhaft grossartigen Gebäu-

---

*) Dass Leibniz sie als gewöhnliche Grössen auffasst, geht aus seiner Bemerkung hervor: *Idem est* dx *et* $\frac{x}{d}$, *id est differentia inter duas* x *proximas.*

des bewirkt hat, das zu überschauen und in seinen einzelnen Theilen kennen zu lernen nur dem gelingt, in welchem eminentes Talent mit höchster Spannkraft und unermüdlicher Ausdauer vereint sich findet. — Es ist nicht zu verkennen, dass Leibniz, durch seinen glücklichen Genius geleitet, fast zufällig auf die Einführung des Algorithmus der höheren Analysis kam; andrerseits darf aber auch nicht geläugnet werden, dass er, durch frühere Studien dazu ausgerüstet und das Gebiet der Wissenschaft überschauend, die Wichtigkeit der glücklichen Entdeckung, wenn auch nicht in ihrem ganzen Umfange, sogleich erkannte und aufs geschickteste zu benutzen wusste. Das aber muss ein Jeder offen zugestehen, dass Leibniz bei der Einführung seines neuen Algorithmus durchaus selbstständig, ohne irgend welchen Einfluss von aussen her, verfuhr; eine unbefangene Betrachtung seiner Manuscripte nöthigt dazu. Alle Zweifel, jeder Verdacht eines Plagiats wird durch die hier zum ersten Mal in Zusammenhang veröffentlichten Manuscripte beseitigt, und das Capitel, im welchem die Frage über den ersten Entdecker der höheren Analysis bisher erörtert wurde, verschwindet fortan aus der Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Der mehr als hundertjährige Streit über den ersten Entdecker der Diffentialrechnung ist zu Ende.

Ebenso bekunden Leibnizens Manuscripte, welche in grösster Vollständigkeit vorhanden sind, aufs deutlichste, dass er ohne alle fremden Winke, lediglich mit Hülfe seines neuen Algorithmus die Fundamentalsätze der höheren Analysis gefunden und durchaus selbstständig der hohen Bedeutung seiner neuen Rechnung nach und nach sich bewusst worden ist. In einem Manuscript vom 21. November 1675*) kommt er bei der Untersuchung eines Problems auf den Ausdruck für $d\,(xy)$ und erkennt in ihm sofort ein allgemeines, für alle Curven gültiges Theorem. Zugleich gelingt es ihm, aus einer Differentialgleichung das eine Differential dx zu eliminiren, so dass sie nur dy enthält, und bewirkt so die Lösung des vorgelegten Problems. Da ruft er aus: *Ecce elegantissimum specimen, quo problemata Methodi Tangentium inversae solvuntur aut saltem reducuntur ad Quadraturas!* und fährt einige Zeilen nachher so fort: *Quandocunque*

*) Dasselbe ist vollständig abgedruckt in: Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz, Beilage III.

in vinculo relictae (d. h. unter dem Differentialzeichen) *unius incognitae formulae sunt tales, ut incognita non contineatur in irrationalitate aut nominatore, semper absolute solvi potest problema, reducitur enim ad quadraturam, quae est in potestate; idem est in nominatoribus et irrationalibus simplicibus. At in compositis casus evenire potest, ut ad quadraturam redeamus, quae non est in potestate. Sed quidquid sit, quandocunque problema ad quadraturam reduximus, semper describi potest curva quaesita motu Geometrico, qui exacte in potestate est, nec materialem curvam supponit.* Demnach hat Leibniz den Zusammenhang zwischen dem umgekehrten Tangentenproblem und den Quadraturen, der ihm bisher dunkel vorschwebte, deutlich erkannt und bereits einen guten Schritt vorwärts in der Behandlung von dergleichen Problemen gemacht. Hierauf deutet er offenbar hin, wenn er an Oldenburg schreibt (28. December 1675): *Sed et ad aliud Problema Geometricum, hactenus pene desparatum, nuper aditum reperi felicem. De quo pluribus loquar, ubi otium erit absolvendi. Haec vero omnia,* setzt er hinzu, *ubi ita in ordinem redegero ut mitti possint, singulatim tibi spondeo. Ex quibus agnoscetis, credo, non tantum soluta a me Problemata, sed et nova methodo* (*hoc enim ego unice aestimo*) *detecta esse.*

Nach Verlauf eines halben Jahres ist Leibniz zu der Erkenntnis gelangt, dass auch das directe Tangentenproblem mittelst seiner neuen Rechnung allgemein aufgelöst werden kann. In einem Manuscript vom 26. Jun. 1676, überschrieben: *Nova Methodus Tangentium*, beginnt er so: *Circa Methodum tangentium directam pariter et universam multa praeclara habeo. Cartesii methodus tangentium nititur duabus radicibus aequalibus, nec locum habet, nisi cum omnes quantitates indeterminatae calculum ingredientes explicabiles sunt per unam, nempe abscissam. At vera methodus tangentium generalis est per differentias. Ut scilicet ordinatarum* (*directarum vel convergentium*) *quaeratur differentia. Unde fit, ut etiam quantitates alioqui calculo non subjectae, subjiciantur calculo tangentium, modo earum differentiae sint cognitae.* —

Eine vorzügliche Gelegenheit bot das de Beaune'sche Problem*),

---

*) Florimond de Beaune gehörte zu den eifrigsten Verehrern von Descartes. Er hat sich besonders dadurch einen Namen in der Geschichte

die Tragweite der neuen Rechnung zu prüfen und ihre Superiorität über die bisher gebräuchlichen Methoden zu zeigen. Leibniz löste es ohne Schwierigkeit in kürzester Zeit. Zugleich wurde die Untersuchung dieses Problems Veranlassung zu einer Erweiterung des bisherigen Gebietes der höheren Analysis: Leibniz fand die Bedeutung von $\int \frac{dx}{x}$. —

Dies ist im Allgemeinen der Umfang, welchen die höhere Analysis unter Leibnizens Händen während seines Aufenthalts in Paris gewonnen hatte. Wenn er auch noch nicht in ihr das wichtige Instrument erkannte, das einen ungeheuren Umschwung in den gesammten mathematischen Disciplinen zu bewirken bestimmt war, so war er doch von der Vorzüglichkeit seiner neuen Rechnung vor allen früheren Methoden überzeugt; denn er hatte mit ihrer Hülfe die bis dahin ungelösten Probleme bewältigt, und er schrieb ahnungsvoll von Paris aus an Oldenburg (27. August 1676): *Fateor tamen nondum me quicquid in hoc genere desiderari potest consecutum, quanquam maximi momenti esse sciam.* — Auf seiner Rückreise*) nach Deutschland verweilte Leibniz eine Woche in London, wo er die persönliche Bekanntschaft von Collins machte, der bisher in der Correspondenz zwischen Oldenburg und Leibniz der Rathgeber des erstern in Bezug auf mathematische Gegenstände gewesen war. Collins hat in einem Briefe an Newton**) Rechenschaft über dieses Zusammensein mit Leibniz gegeben; zugleich enthält dieses Schreiben ein

---

der Wissenschaft erworben, dass er zur Entstehung des sogenannten umgekehrten Tangentenproblems Veranlassung gab. De Beaune legte nämlich im Jahre 1641 Descartes folgende Aufgabe vor: eine krumme Linie der Art zu finden, dass die Ordinaten sich zur Subtangente verhalten, wie eine gegebene Linie zu demjenigen Stücke der Ordinate, welches zwischen der krummen Linie und einer unter einem gegebenen Winkel geneigten Linie enthalten ist. Die Lösung dieser Aufgabe überstieg die Kräfte der Methode des Descartes; indessen wusste er doch einige Eigenschaften der fraglichen krummen Linie nebst der Construction derselben anzugeben, ohne aber die Art und Weise, wie er dazu gelangt war, bekannt zu machen. — Leibnizens Lösung findet sich vollständig abgedruckt in: Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz, Beilage VI.

*) Leibnizens Abreise von Paris erfolgte im October 1676.

**) Leibnizens mathematische Schriften, Bd. 1. S. 147 ff.

Bruchstück eines Briefes, welchen Leibniz von Amsterdam aus, wohin er seinen Weg von London genommen, an Oldenburg 18/28. November 1676 schrieb. Leibniz erwähnt darin, dass die Tangentenmethode de Sluze's noch nicht das Vollkommenste wäre, was sich in dieser Hinsicht erreichen liesse, und setzt alsdann sein Verfahren ziemlich weitläufig auseinander, jedoch mit sorgfältiger Vermeidung jedes Algorithmus. Er gedenkt auch seines Verkehrs mit Hudde, welcher die mathematischen Wissenschaften mit dem ausgezeichnetsten Erfolge trieb, aber manches neue Resultat unveröffentlicht in seinen Papieren liegen lassen musste, da ihm seine amtliche Stellung — er war einer der Bürgermeister von Amsterdam — keine hinreichende Musse zur Durcharbeitung gewährte. Ohne Rückhalt theilte er jedoch Leibniz seine Untersuchungen mit und gestattete ihm Einsicht in seine Manuscripte. Unter andern bewies Hudde, dass er eine Tangentenmethode besässe, deren Anwendbarkeit allgemeiner sei, als die de Sluze's, und dass er sehr oft den Ausdruck für die Tangente und für Quadraturen sogleich hinschreiben könne, ohne zuvor Brüche und Wurzelzeichen wegschaffen zu müssen*). Es konnte nicht fehlen, dass Leibniz hierdurch veranlasst wurde, sein eigenes mittelst des neuen Algorithmus gewonnenes Verfahren zur Construction der Tangenten dazu in Parallele zu stellen. Das als Beilage IV. mitgetheilte Manuscript mit der Aufschrift: *Calculus tangentium differentialis*, ist höchst wahrscheinlich dasjenige, welches er zu diesem Behuf entwarf, denn es trägt das Datum: *Novembr.* 1676, und ist mithin entweder zu Amsterdam oder auf der Reise geschrieben. Leibniz giebt darin zunächst eine Zusammenstellung von den bisher gewonnenen Ergebnissen seiner neuen Rechnung, und bemerkt ausdrücklich, dass sie durchaus allgemein sind; alsdann gewinnt er die Ueberzeugung, dass sein neues Verfahren zur Construction der Tangenten nicht nur dasselbe leiste, als die Tangentenmethode de Sluze's, sondern auch auf mehr als zwei Veränderliche ausgedehnt werden könne, so dass er also im Stande sei, auch die Berührungsebenen krummer Flächen dadurch zu finden; besonders aber ständen weder Brüche noch irrationale Ausdrücke der unmittelbaren Anwendung desselben durchaus nicht entgegen. — Leibniz gelangte gegen Ende des De-

*) Siehe: Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz, Beil. VII.

cember 1676 in Hannover an. Es darf nicht befremden, dass er auf längere Zeit, wie es scheint, die Differentialrechnung ganz aus den Augen verlor; ein veränderter Wohnsitz, ein neues Amt, nahmen anderweitig seine Aufmerksamkeit in Anspruch. Erst um die Mitte des Jahres 1677 kommt Leibniz in einem Antwortschreiben an Newton auf die Differentialrechnung zurück. Da er aus Newton's brieflichen Mittheilungen annehmen musste, dass derselbe ebenfalls eine eigenthümliche Tangentenmethode besässe, die vollkommener sei, als die de Sluze's, so glaubte Leibniz eine nähere Mittheilung über sein Verfahren nicht zurückhalten zu dürfen, und er spricht sich hier über die Differentialrechnung und die mittelst derselben gewonnene Bestimmung der Tangenten zum ersten Male umständlich aus*). Ausserdem ist dieses Schreiben insofern noch von Wichtigkeit, als Leibniz sich darin über das gesammte Gebiet der höheren Analysis, so weit er es in seiner Gewalt hatte, verbreitet und die Probleme bezeichnet, die noch zu lösen seien. Namentlich legt er auf die Behandlung der sogenannten umgekehrten Tangentenprobleme ein besonderes Gewicht, vermeidet jedoch sorgfältig jede Andeutung über den Algorithmus der Integralrechnung, wodurch er die Lösung möglich machte. — Es scheint, als habe Leibniz zugleich mit dieser offenen Mittheilung der Differentialrechnung an Newton den Entschluss gefasst, seine Entdeckung der gelehrten Welt bekannt zu machen. Unter seinen Papieren findet sich nämlich ein Manuscript vom 11. Juli 1677 mit der Aufschrift: *Methode generale pour mener les touchantes des Lignes Courbes sans calcul, et sans reduction des quantités irrationelles et rompues***), das zum Abdruck bestimmt gewesen sein dürfte, da mehrere Ueberarbeitungen davon vorhanden sind. Es ist darin die Differentialrechnung in demselben Umfange dargestellt, wie Leibniz sie sieben Jahre später im Jahre 1684 bekannt gemacht hat. Aus welchem Grunde er damals die Veröffentlichung wieder aufgab, darüber lassen sich nur Vermuthungen aufstellen. Ausser dem, dass Leibniz hierin der Gewohnheit seiner Zeit folgte, nach welcher die Mathematiker ihre neuen Methoden geheim hielten, um den möglichsten Vortheil davon zu ziehen, lässt sich noch anführen, dass er viel-

*) Leibnizens mathematische Schrift. Bd. 1. S. 154 ff.

**) Siehe Beilage V.

leicht befürchtete, durch die öffentliche Bekanntmachung der Differentialrechnung den Schleier, mit welchem er den Algorithmus der Integralrechnung sorgsam zu verhüllen sich bemühte, in etwas zu lüften; aber dies Geheimniss wollte er auf jede Weise bewahren, denn mit ihrer Hülfe hatte er bereits Probleme gelöst, welche die bisherigen Methoden nicht zu bewältigen vermochten, und er gedachte noch weiter auf diesem Gebiet zu den glänzendsten Entdeckungen zu gelangen und die ruhmreichsten Lorbern zu pflücken.

Noch bleibt die Frage zu beantworten, warum endlich nach 7 Jahren Leibniz sein Stillschweigen brach und in der ewig denkwürdigen Abhandlung: *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (*Act. Erudit. Lips. an.* 1684. *mens. Octobr.*) die Grundzüge der höheren Analysis bekannt machte, ohne jedoch die Gränzen zu überschreiten, welche er sich im Jahre 1677 gesteckt hatte. Derselbe Kampf, der über den ersten Entdecker der Differentialrechnung später entbrannte und ihm die letzten Lebensjahre verbitterte, drohte bereits auszubrechen, bevor noch irgend eine Kunde über die neue Rechnung in die Oeffentlichkeit gelangt war: Leibniz musste befürchten, dass sein getreuester Freund und Studiengenosse während seines Aufenthalts in Paris, der Freiherr von Tschirnhaus*), ebenfalls Ansprüche auf die Entdeckung der höheren Analysis machte. Diesem wollte Leibniz zuvorkommen, und er entschloss sich sein so lange bewahrtes Geheimniss nicht weiter zurückzuhalten. Um über diesen Umstand, dessen bisher noch nirgends gedacht ist, ein klares Licht zu verbreiten, ist es nöthig, auf das Verhältniss zwischen Leibniz und Tschirnhaus mit einiger Ausführlichkeit näher einzugehen.

Der Freiherr Ehrenfried Walther von Tschirnhaus, um 5 Jahre jünger als Leibniz, hatte sich nach sorgfältiger Vorbildung, im Jahre 1668 nach Holland begeben, um auf der Universität Leyden seine Studien zu vollenden. Er verweilte daselbst bis zum Jahre 1672, nahm auf einige Zeit Kriegsdienste gegen die Franzosen, kehrte aber nach anderthalbjähriger

*) So schreibt er selbst meistens seinen Namen, zuweilen auch Tschirnhauss.

Unterbrechung zu seinen Studien wieder zurück. Es ist nicht zu verkennen, dass sich für Tschirnhaus auf der Universität Leyden eine weit günstigere Gelegenheit darbot, mit den mathematischen Disciplinen in ihrem ganzen Umfange bekannt zu werden, als für Leibniz auf den Universitäten Leipzig und Jena; während hier kaum die Elemente Euklid's gelehrt wurden, lebten und lehrten in Holland die Schüler von Descartes. In die Cartesianische Geometrie, die Leibniz vom Jahre 1673 ab in Paris durch eigene Anstrengung sich zu eigen machen musste, wurde Tschirnhaus bereits 5 Jahre früher auf das gründlichste eingeweiht. So ausgerüstet trat er in seinem 24. Jahre eine grosse wissenschaftliche Reise an. Er ging zunächst nach England und machte daselbst die Bekanntschaft von Wallis, Newton, Collins, Oldenburg. Hier fand er bereits die Grundzüge zu seiner Auflösung der Gleichungen, welche er später im Jahre 1683 in den *Actis Erudit. Lips.* veröffentlichte. Von Oldenburg mit Empfehlungen an Leibniz versehen, wandte sich Tschirnhaus im September 1675*) nach Paris; er wurde sehr bald mit Leibniz auf das innigste befreundet, denn beide verband dieselbe Vorliebe für die mathematischen Wissenschaften. *Quod Tschirnhausium ad nos misisti*, schreibt Leibniz am 28. December 1675 an Oldenburg, *fecisti pro amico; multum enim ejus consuetudine delector, et ingenium agnosco in Juvene praeclarum magna promittens, inventa mihi ostendit non pauca, Analytica et Geometrica, sane perelegantia. Unde facile judico, quid ab eo expectari possit.* — Die Leibnizischen Manuscripte aus der zweiten Hälfte des Jahres 1675 tragen zahlreiche Spuren von den gemeinschaftlichen Studien beider. Es finden sich von Tschirnhaus' Hand, welche von der Leibnizens sehr deutlich zu unterscheiden ist, Figuren gezeichnet, daneben sind algebraische Operationen ausgeführt, aber es fehlt meistens jede weitere Notiz über die Bedeutung der Zeichen, und somit lässt sich über das Wesen dieser gemeinsamen Studien kein bestimmtes Urtheil fällen.

Tschirnhaus verliess im November 1676 Paris, um wenige Wochen später, nachdem Leibniz nach Deutschland zurückgekehrt war. Er ging durch Frankreich nach Italien, verweilte längere Zeit in Rom und be-

---

*) Oldenburg's Schreiben an Leibniz vom 30. September 1675. Leibnizens mathematische Schriften Bd. 1. S. 82.

suchte von hier aus Sicilien und Malta. Von Rom schrieb er seinen ersten Brief an Leibniz*); er meldet ihm, dass er ein Verfahren gefunden habe, mittelst dessen alle Curven quadrirt werden könnten und zwar mit grösserer Leichtigkeit, als durch die bisher bekannten Methoden. In einem spätern Schreiben setzt Tschirnhaus hinzu, dass nach seinem Dafürhalten diese seine Methode leichter zu fassen sei und der üblichen mathematischen Ausdrucksweise näher stehe, als Leibnizens Verfahren, die Quadraturen durch Summationen (d. h. durch Integralrechnung) zu finden; *novitatem in definitionibus vocum,* fährt er fort, *quantum possum effugio, hoc enim nihil aliud est quam scientias difficiles reddere*; weiterhin spricht er sogar, offenbar mit Bezug auf die von Leibniz eingeführten Summenzeichen, von: *monstra characterum.* Da Leibniz die Neuheit seiner Methode nicht anerkennen will, so vergleicht Tschirnhaus, in gereizter Stimmung darüber, die neue Rechnung Leibnizens mit Barrow's Methode, durch welche dieselben Resultate gewonnen würden, ohne besondere Zeichen. — Diese von Tschirnhaus aufgestellte Methode zur Quadratur der Curven fällt jedoch principiell mit der Methode Cavaleri's oder vielmehr mit der modificirten des Gregorius a S. Vincentio zusammen; nur darin scheint Tschirnhaus einen Schritt weiter gegangen zu sein, dass er die von Descartes eingeführte Betrachtungsweise zur Erforschung der Eigenschaften der Curven, auch auf die Bestimmung der Quadratur und Cubatur zur Anwendung brachte; ähnlich wie Fermat in seiner *Methodus de maximis et minimis* bedient er sich einer unendlichkleinen Grösse, die er mit 0 bezeichnet. — Dagegen bemerkt Leibniz mit Recht, dass Tschirnhaus' Methode ebenso wie alle übrigen, nicht allgemein, vielmehr des mangelnden Algorithmus wegen (*calculi defectu*) unvollkommen wären; *habent enim,* setzt er hinzu, *aliquid a casu. Ego methodum per differentias habeo pro perfectissima, ejus enim ope omnes curvas quadrabiles in Tabula exhiberi posse certum et demonstrabile est*, *quod me Tibi alias dicere memini.* Leibniz ist auf das vollkommenste überzeugt, dass seine Methode vor allen andern wegen

---

*) Im Jahre 1851 wurde die Correspondenz zwischen Leibniz und Tschirnhaus, nachdem sie längere Zeit nicht aufgefunden werden konnte, auf der Königlichen Bibliothek zu Hannover wieder entdeckt und von Seiten des Vorstandes selbiger Bibliothek mit der ausgezeichnetsten Liberalität zu meiner Disposition gestellt.

der von ihm eingeführten Bezeichnungsweise den Vorzug verdiene; er schreib Ende Mai 1678 an Tschirnhaus: *Ego non hunc tantum, sed et infinitos alios modos habeo obtinendi aequationes tetragonisticas per calculum, cujus istae a Te propositae sunt casus tantum; calculum autem hunc exequor per nova quaedam signa mirae commoditatis. In signis spectanda est commoditas ad inveniendum, quae maxima est, quoties rei naturam intimam paucis exprimunt et velut pingunt, ita enim mirifice imminuitur cogitandi labor. Talia vero sunt signa, a me in calculo aequationum tetragonisticarum adhibita, quibus problemata saepe difficillima paucis lineis solvo. — Est mihi pro methodo tangentium inversa et methodo tetragonistica calculus idem, eadem signa. De his omnibus me jam olim Tibi loqui memini, sed parum attendenti.* —

Hieraus erhellt, dass Tschirnhaus auf das umfassendste und tiefste in Leibnizens Entdeckung eingeweiht war. Durch die fortgesetzte Correspondenz sowohl, als durch wiederholte mündliche Besprechungen, die zwischen beiden stattfanden, wenn Tschirnhaus auf seinen Reisen nach Paris bei Leibniz in Hannover einkehrte, blieben beide Freunde über ihre gegenseitigen Studien fortwährend unterrichtet. Bei solchem innigen Verhältniss konnte es nicht fehlen, dass wenn der eine eine neue Idee äusserte, der andere sie aufgriff, sie weiter ausspann und nun für sein Eigenthum hielt, obwohl sie ihm ursprünglich nicht angehörte. Entstanden Differenzen über streitige Punkte, so wurden sie sehr bald wieder ausgeglichen, so lange sich Tschirnhaus auf Reisen befand; dies änderte sich jedoch, als der letztere selbst als Schriftsteller auftrat und in den *Actis Erudit. Lips.* seine Studien zu veröffentlichen begann. Leibniz liess im Jahre 1684 die Abhandlung: *De dimensionibus Figurarum inveniendis*, drucken; Tschirnhaus glaubte auf das darin entwickelte Verfahren ebenfalls Ansprüche zu haben und übersandte an den Redacteur Mencken eine Schrift zur Aufnahme in die Zeitschrift, in welcher er gegen Leibniz seine Rechte geltend machte. Mit Mühe konnte ein ärgerlicher Prioritätsstreit im Entstehen unterdrückt werden. Ein Gleiches durfte Leibniz für seine neue Rechnung befürchten; er beschloss daher mit der Bekanntmachung nicht länger zu zögern.

Unter solchen Verhältnissen trat eine der grossartigsten Schöpfungen der neueren Zeit an das Licht der Oeffentlichkeit. Noch überlegte Leibniz, ob er sein ganzes Geheimniss enthüllen, die Einsicht in das Princip seiner neuen Rechnung gestatten, den Zugang zur Integralrechnung, den er bisher so sorgsam verwahrt, erschliessen, oder ob er nur zu einer theilweisen Bekanntmachung schreiten und nur so viel mittheilen sollte, dass nöthigenfalls die Priorität der Entdeckung ihm gesichert blieb. Er wählte das Letztere. Wie wir oben gesehen haben, beabsichtigte Leibniz bereits im Jahre 1677 zugleich mit der allgemeinen Auflösung des Tangentenproblems die Grundzüge der Differentialrechnung öffentlich mitzutheilen. Diesen Plan konnte er jetzt wieder aufnehmen, denn die allgemeine Lösung jenes Problems war noch immer nicht gegeben. Leibnizens Abhandlung, welche der Ausgangspunkt zu einer totalen Umwälzung auf dem Gebiet der mathematischen Disciplinen werden sollte, erschien in den *Actis Erudit. Lips. an.* 1684. *mens. Octobr.* In Uebereinstimmung mit der hier entwickelten Lage der Sache macht sie den Eindruck, dass Leibniz das reiche Material, welches ihm zu Gebote stand, geflissentlich zusammendrängt und dadurch eine gewisse Undurchsichtigkeit zu schaffen weiss, welche das Verständniss der neuen Lehre nothwendig erschweren musste. Namentlich wird jene Ursprünglichkeit in der Darstellung vermisst, welche eine jede ohne Rückhalt mitgetheilte neue Entdeckung begleitet und die Einsicht in dieselbe wesentlich fördert. Zwar giebt Leibniz darin die Grundzüge der Differentialrechnung zugleich mit einer Anweisung, wie die letztere zur Behandlung geometrischer Probleme angewandt werden könne; dagegen vermeidet er auf das sorgfältigste jede Erwähnung der Integralrechnung und nur am Schluss der Abhandlung findet sich eine sehr unbestimmte Andeutung*), dass er noch einen kostbaren Schatz verwahre, zu dem er den Zutritt noch nicht gestatten will. Hieraus entstand später für Leibniz der Nachtheil, dass Johann Bernoulli die Entdeckung der Integralrechnung für sich in Anspruch nahm; um einen Streit zu vermeiden, einigten sich beide dahin, dass die von Joh. Bernoulli vorgeschlagene Benennung „*calculus integralis*“ als die allein gültige anzuerkennen, dagegen aber das von Leibniz eingeführte Summen- oder Inte-

---

*) *Et haec quidem initia sunt tantum Geometriae cujusdam multo sublimioris, ad difficillima et pulcherrima quaeque etiam mistae Matheseos problemata pertingentis, quae sine calculo nostro differentiali aut simili non temere quisquam pari facilitate tractabit.*

gralzeichen an die Stelle des Bernoullischen **I** allgemein zu gebrauchen sei. — Desgleichen ist auch die Stelle, in welcher Leibniz über das Princip seiner neuen Rechnung sich ausspricht*), so dunkel gefasst, dass sogar die Meinung entstanden ist, als habe er selbst über das Fundament der höheren Analysis keine deutliche Vorstellung gehabt. Um diese irrige Ansicht zurückzuweisen und um zugleich einen Ueberblick zu gewinnen über den Umfang, in welchem Leibniz die Grundzüge der höheren Analysis um diese Zeit hätte mittheilen können, genügt die Betrachtung der als Beilage VI. abgedruckten Abhandlung, die offenbar ebenfalls zum Behuf der Bekanntmachung der neuen Rechnung entworfen ist. Schon aus der Aufschrift derselben: *Elementa calculi novi pro differentiis et Summis, tangentibus et quadraturis, maximis et minimis, dimensionibus linearum, superficierum, solidorum, aliisque communem calculum transcendentibus,* erhellt, dass Leibniz hier unverholen und ohne Rückhalt sein ganzes Geheimniss eröffnen will, und Niemand wird läugnen, dass wenn Leibniz die Grundzüge der höheren Analysis in dieser Fassung zuerst bekannt gemacht hätte, mancher Zweifel über die Zuverlässigkeit ihres Princips nicht entstanden wäre.

---

*) *Excognito hoc velut Algorithmo, ut ita dicam, calculi hujus, quem voco differentialem, omnes aliae aequationes differentiales inveniri possunt per calculum communem, maximaeque et minimae, itemque tangentes haberi, ita ut opus non sit tolli fractas aut irrationales aut alia vincula, quod tamen faciendum fuit secundum Methodos hactenus editas. Demonstratio omnium facilis erit in his rebus versato, et hoc unum hactenus non satis expensum consideranti, ipsas dx, dy, dv, dw, dz, ut ipsarum x, y, v, w, z (cujusque in sua serie) differentiis sive incrementis, vel decrementis momentaneis proportionales haberi posse.*

Die Entdeckung

der Fluxionsrechnung

durch Newton.

Die Entdeckung der Fluxionsrechnung durch Newton. *)

Das überaus reiche und vollständige Material, welches in Bezug auf die Entdeckung des Algorithmus der höheren Analysis durch Leibniz zu Gebote steht, fehlt in Betreff der Fluxionsrechnung; es lässt sich deshalb weder die Art und Weise, noch die Zeit der Entstehung derselben mit Sicherheit angeben. Newton selbst hat nur wenig darüber bekannt gemacht, und der grösste Theil seiner nachgelassenen Manuscripte liegt, seitdem er durch Erbschaft Eigenthum einer Familie geworden ist, noch unberührt in deren Privatbibliothek (Brewster S. 290).

Es wird berichtet, dass Newton in den ersten Jahren seines Aufenthalts auf der Universität Cambridge meistens sich selbst überlassen, in dem Studium der Mathematik seinen eigenen Weg gegangen sei. Demnach ist es leicht erklärlich, dass er zu den Werken griff, welche damals in der mathematischen Literatur die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich zogen: zur Geometrie des Descartes und zu Wallis' *Arithmetica infinitorum* (Brewster S. 11). Erst in Isaac Barrow, der im Jahre 1663 die Professur der Mathematik übernahm, gewann er einen Rathgeber und Freund; denn dass dieser einen bedeutenden Einfluss auf Newton's Studien gehabt haben muss, erhellt besonders daraus, dass auch Newton auf dieselben mathematischen Disciplinen, mit welchen Barrow sich vorzugs-

*) Als Quellen sind benutzt worden: *Neuton. op. ed. Horsley; Neuton. opuscul. ed. Castillion;* Newton's Leben von Brewster, deutsch von Brandes und Goldberg; *Newton's correspondence with Cotes, by Edleston,*

weise beschäftigte, sein Augenmerk richtete. — Barrow war, wie bereits bemerkt worden ist, ein grosser Lobredner der Methode Cavaleri's; in den Vorlesungen, die er im Jahre 1665 hielt, nennt er sie „*nunquam satis laudata, foecundissima novorum in Geometria repertorum mater.*"*) Durch ihn also wurde Newton in dem Studium der *Arithmetica infinitorum*, in welcher die Cavalerische Methode zur Anwendung kommt, bestärkt und ermuntert auf dem von Wallis eingeschlagenen Wege fortzuschreiten. Es ist schon hervorgehoben worden, dass durch Wallis die Lehre von den Reihen Selbstständigkeit erlangte, so wie auch dass er namentlich darauf hinarbeitete, möglichst allgemeine Resultate zu erzielen. Nachdem er die Quadraturen Roberval's und Fermat's verallgemeinert, hatte er sich zur Untersuchung derjenigen Curven gewandt, deren Ordinaten durch eine ganze Potenz eines zweitheiligen Ausdrucks von der Form $aa \pm xx$ dargestellt werden, und hatte vermittelst Interpolation einen Ausdruck für die Fläche des Kreises, dessen Ordinate $= (aa - xx)^{\frac{1}{2}}$, gewonnen. Hier knüpfte Newton an; er bemerkte, dass wenn die Ordinate eine Curve durch einen zweitheiligen Ausdruck von der Form $(1 - xx)^0$, $(1 - xx)^1$, $(1 - xx)^2 \ldots$ ausgedrückt wird, die Fläche der Curve beziehungsweise gleich x, $x - \frac{1}{3}x^3$, $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$, $x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \ldots$ ist. Da in diesen Ausdrücken das erste Glied constant $= x$, die zweiten Glieder $\frac{0}{3}x^3$, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{2}{3}x^3$, $\frac{3}{3}x^3 \ldots$ eine arithmetische Progression bilden, so schloss Newton, dass die beiden ersten Glieder der Ausdrücke für den Flächeninhalt der Curven, deren Ordinaten beziehungsweise durch $(1 - xx)^{\frac{1}{2}}$, $(1 - xx)^{\frac{3}{2}}$, $(1 - xx)^{\frac{5}{2}} \ldots$ ausgedrückt werden, von der Form $x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, $x - \frac{\frac{3}{2}x^3}{3}$, $x - \frac{\frac{5}{2}x^3}{3} \ldots$ sein müssten. Das Gesetz, nach welchem in diesen Ausdrücken die Nenner fortschreiten, ist offenbar; Newton forschte deshalb nach der Abhängigkeit der Zähler von einander, und fand eine Reihe für den Inhalt eines Kreissegments. Dies Alles erzählt Newton ausführlich in seinem zweiten Schreiben an Leibniz vom 24. October 1676 (Leibnizens mathematische Schriften, Bd. 1. S. 122 ff.) und setzt hinzu: *Hic fuit primus meus in-*

---

*) *J. Barrow Lectiones habitae in scholis publicis Academiae Cantabrigiensis an.* 1664, 1665, 1666 *etc. Londin.* 1684.

gressus in has meditationes: qui e memoria sane exciderat, nisi oculos in adversaria quaedam ante paucas septimanas retulissem. — Es sind dies zugleich die ersten Schritte zur Entdeckung des binomischen Lehrsatzes.

Da Newton $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ und $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ setzte, so gewann er durch dieses erste Ergebniss seiner Studien ein Verfahren zur Wurzelausziehung. Er bemerkt jedoch, dass er diese Methode zur Wurzelausziehung sowohl, als die Entwickelung eines Quotienten in eine Reihe mittelst Interpolation aufgegeben, nachdem er das noch jetzt gebräuchliche Verfahren zum Ausziehen einer Quadratwurzel entdeckt und einen Quotienten durch unmittelbare Division in eine Reihe dargestellt.

Die Methoden, welche bisher in Newton's Gewalt waren, reichten aus, die Quadratur einer Curve zu bewirken, wenn die Ordinate als eine explicite Function der Abscisse sich darstellt; es blieb demnach die Lösung dieses Problems für den Fall noch übrig, dass die Ordinate unter der Form einer impliciten Function gegeben ist. Deshalb richtete Newton zunächst seine Aufmerksamkeit auf die Auflösung der Gleichungen; es gelang ihm das nach ihm benannte Verfahren zu entdecken, nach welchem die Wurzel einer Gleichung ebenfalls durch eine unendliche Reihe gefunden wird. Der innige Zusammenhang, in dem das bisher Angeführte zu einander steht, ist nicht zu verkennen.

Durch diese Reihenentwicklungen indess wurde Newton gewiss nicht auf das Princip der Fluxionen geführt, denn durch sie wird das auf eine andere umständlichere Weise gewonnen, was die höhere Analysis direct mit einem Schlage bewirkt. Wir haben jedoch diese arithmetischen Untersuchungen deshalb hier ausführlich mitgetheilt, um zu zeigen, wie dieser eminente Geist das von seinen Vorgängern Begonnene streng im Zusammenhange weiter zu führen verstand. —

Es konnte Newton nicht entgehen, dass die Probleme der Quadratur, Rectification, Cubatur u. s. w. in einem gewissen Zusammenhang ständen und dass demnach ihre Lösung ebenfalls durch ein gemeinsames, immer anwendbares Mittel möglichst allgemein bewerkstelligt werden müsste. Er begriff, dass, um dieses Mittel zu finden, auf den Ursprung der bisher dazu gebrauchten Verfahrungsweisen zurückzugehen sei, um zu erforschen, ob durch eine Verallgemeinerung des Princips eine allgemeine Methode geschaffen werden könnte. So musste er nothwendig auf das ursprünglich Cavalerische Verfahren, als die Quelle aller übrigen, zurückgeführt werden. Cavaleri hatte die räumlichen Grössen durch Bewegung entstehen lassen, und diejenige Grösse, durch deren Bewegung eine andere entsteht, benutzt, um die Eigenschaften der zweiten zu entdecken. Diese Cavalerische Weise wurde durch Isaac Barrow insofern vervollkommnet, als der letztere ausser der Bewegung noch die Zeit und die Geschwindigkeit bei der Erzeugung räumlicher Grössen in Betracht zog. Indem Barrow die Continuität voraussetzt, dienen ihm die folgenden Aristotelischen Bestimmungen als Grundlage: *Cum quidquid movetur ab alio termino ad aliquem terminum promoveatur et omnis magnitudo continua sit, magnitudinem eatenus consequitur motus. Ob magnitudinis quippe continuitatem continuus est motus, et propter motum tempus quoque continuum est. Quantus enim extitit motus, tantum quoque tempus perpetuo videtur effluxisse. Prius autem et posterius spatio primitus insunt, ex diversa partium ejus positione: cumque magnitudini insit partium ordo, motui quoque necessario inerit, analogice respondens illi. Quinetiam in tempore reperitur prius et posterius, quia semper eorum alterum alteri consequens est. — Magnitudinem sectatur motus, motus vero tempus, quatenus haec quanta sunt et continua et divisibilia. Quia jam magnitudo talis est, ideo taliter affectus est motus et propter motum tempus.**) Dadurch dass Barrow den innigen Zusammenhang, der zwischen Grösse, Bewegung und Zeit stattfindet, festhielt, gelang es ihm, aus der Cavalerischen Methode das mit der strengen Wissenschaft Unvereinbare zu entfernen und auf eine andere Weise den Connex zwischen den räumlichen Grössen festzustellen. *Non existimo* — heisst es an einer andern Stelle in seinen Vorlesungen aus dem Jahre 1665 — *superficies, lineas aut puncta separatam quandam existentiam aut propriam ex se ipsis efficaciam possidere, vel aliter a solida magnitudine quam κατ᾽ ἐπίνοιαν distingui; sed unicam potius arbitror ex parte rei magnitudinem dari, quae prout in varias partes extendi, diversimode partiri, differentes spissitudinis, latitudinis et longitudinis considerationes induere vel subire potest, causam vel occa-*

*) Aus den oben angeführten Vorlesungen des Jahres 1665.

sionem suppeditat idoneam rationi nostrae distinctionem istam magnitudinis in tres quasi species huic scientiae perquam utilem et accommodatam comminiscendi.

Wir dürfen wohl annehmen, dass Newton, als Barrow's Schüler und Freund, frühzeitig mit dergleichen Auffassungen vertraut wurde. Es konnte ihm nicht entgehen, dass die Bewegung selbst ein vorzügliches Mittel zur Erforschung der Eigenschaften der durch sie hervorgebrachten räumlichen Grössen darbietet; Cavaleri hatte darauf seine Methode gegründet, Barrow eine neue Tangentenmethode mittelst derselben aufgestellt. Daher darf es nicht befremden, dass Newton bereits beim Beginn seiner mathematischen Studien auf die Erforschung der Bewegungsgesetze sein Augenmerk richtete.*) Indem er diesen Gegenstand in seinem ganzen Umfange mit jugendlicher Energie erfasste, mussten seinem durchdringenden Scharfsinn nothwendig die beiden folgenden Fundamentalprobleme entgegentreten: Wenn eine durch eine Bewegung beschriebene Raumgrösse für jeden Zeitmoment der Bewegung gegeben ist, die Geschwindigkeit der Bewegung in irgend einem Zeitmoment zu finden, und umgekehrt: Wenn die Geschwindigkeit der Bewegung in jedem Zeitmoment gegeben ist, die durch die Bewegung in einer bestimmten Zeit beschriebene Raumgrösse zu ermitteln. Da Barrow auf Bewegung, Geschwindigkeit und Zeit seine Tangentenmethode basirt hatte, so lag für Newton die Versuchung nahe, die Lösung dieser allgemeinen Probleme zunächst in Bezug auf Curven zu bewirken. Er wurde demnach auf jenes Dreieck geführt, dessen Seiten ein Curvenstück (oder die damit zusammenfallende Tangente) die Abscisse und die Ordinate sind. Gleichwie Barrow nahm Newton an, dass während ein Punkt das Curvenstück y mit irgend einer Geschwindigkeit beschreibt, ein anderer die Abscisse x durchläuft, und zwar in einer Zeiteinheit, die durch die Ordinate dargestellt wird, und es entstand nun die Frage, in welchem Verhältniss stehen die Geschwindigkeiten beider Bewegungen zu einander und wie lässt sich aus dem Verhältniss der Geschwindigkeiten auf die durch die Bewegung entstandenen Grössen schliessen. Newton hatte hierbei den glücklichen Gedanken, durch dieselben Buchstaben, welche die räumlichen Grös-

*) Vergl. die Bemerkungen Newton's zu Leibnizens Brief vom 9. April 1716. *Leib. op. omn. ed. Dutens. Tom. III. p.* 480.

sen y und x ausdrücken, auch beziehungsweise deren Geschwindigkeit zu bezeichnen, für den letztern Fall versah er sie, um Verwechselungen zu vermeiden, mit einem Punkt. Um nun das Verhältniss der Geschwindigkeiten $\dot{y}$, $\dot{x}$ zu erforschen, ging Newton davon aus, dass die unendlichkleinen Incremente*) von y und x, die er mit o bezeichnete, den Geschwindigkeiten, durch welche sie beschrieben werden, proportional sind; es wird mithin, wenn in irgend einem Zeitmoment x um $\dot{x}o$ wächst, in demselben Zeitmoment y um $\dot{y}o$ zunehmen. Dieses Ergebniss wurde das Fundament der neuen Rechnung; Newton setzte nun jedesmal in den Untersuchungen eines Problems aus der höheren Mathematik $x + \dot{x}o$ an die Stelle von x, $y + \dot{y}o$ an die Stelle von y, und verfuhr hinsichtlich der weitern Operationen, wie man bisher zu thun pflegte. Die früheren Entdeckungen Newton's, der binomische Lehrsatz, die Entwickelung in Reihen leisteten treffliche Hülfe zum Ausbau des neuen Gebäudes.

Da Newton selbst nichts über den Weg bekannt gemacht hat, auf dem er zur Erkenntniss des Fundaments der Fluxionsrechnung gelangte, so dürfte schwerlich einmal in diesem Punkte eine vollständige Aufklärung zu erreichen sein, selbst wenn seine hinterlassenen Papiere der sorgfältigsten Untersuchung unterworfen würden. Wer vermag hinabzusteigen in die Werkstatt eines so eminenten Geistes, der mit unwiderstehlicher Consequenz und mit der durchdringendsten Schärfe die entgegenstehenden Schwierigkeiten Schritt für Schritt bei Seite zu schaffen oder zu überwinden wusste! Vor der Hand bleibt nichts anderes übrig, als in den Schriften Newton's die obige Entwickelung des Ganges, auf dem er nach unserm Dafürhalten zur Fluxionsrechnung gelangte, so weit es möglich ist, nachzuweisen.

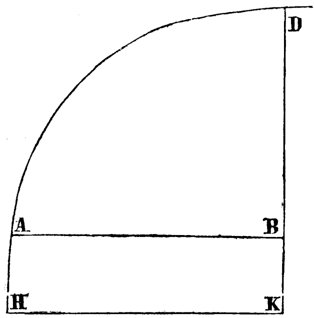
Die erste Schrift, in der sich Andeutungen über das Princip der Fluxionen finden, wurde von Newton im Jahre 1669 verfasst. Er theilte dieselbe seinem Freunde Isaac Barrow mit, durch den sie Collins zur Einsicht erhielt. Letzterer nahm eine Abschrift, die unter seinen nach-

---

*) Newton gebraucht den Ausdruck „*momentum*," um durch ein Wort das Wachsen und Abnehmen zu bezeichnen. Vergl. *Princip. philosoph. nat. math. lib. II. lem. II.*

gelassenen Papieren von William Jones aufgefunden und mit Newton's Genehmigung, nachdem sie mit dem Original verglichen, durch den Druck bekannt gemacht wurde. Sie erschien im Jahre 1711 unter dem Titel: *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas.* Die ganze Haltung der Schrift beweist, dass sie mehr ein Entwurf oder eine Zusammenstellung von dem, was Newton bis dahin gefunden, als ein für die Oeffentlichkeit bestimmtes, abgerundetes Ganze ist; man kann in ihr genau den Weg verfolgen, auf dem Newton in seinen Entdeckungen vorwärts schritt, wie er es selbst in seinem Briefe an Leibniz vom 24. October 1676 erzählt. Newton beginnt mit der Quadratur der einfachen Curven, deren Ordinate $y = ax^{\frac{m}{n}}$ ist; er zeigt sodann, wie die Quadratur complicirter Curven sich darauf zurückführen lässt. Falls x im Nenner eines Quotienten oder unter dem Wurzelzeichen vorkommt, wird der fragliche Ausdruck entweder durch Division oder durch Wurzelausziehung in eine Reihe entwickelt und auf das erhaltene Resultat die Regel für die Quadratur der einfachen Curven zur Anwendung gebracht. Alsdann folgt zum Behuf der Quadratur derjenigen Curven, deren Ordinate als eine implicite Funktion gegeben ist, die *Resolutio aequationum affectarum* d. h. derjenigen Gleichungen, in welchen die Unbekannte zu verschiedenen Potenzen erhoben vorkommt. Dies Alles ist als ein Ausfluss von Newton's Studien über die *Arithmetica infinitorum* zu betrachten. Um aber mit der Quadratur die Probleme der Rectification, Cubatur, der Bestimmung des Schwerpunktes u. s. w. in Verbindung zu bringen, sah er sich genöthigt auf die ursprüngliche Cavalerische Methode zurückzugehen. Newton beschliesst nämlich das Bisherige mit folgenden Worten: *Et haec de areis Curvarum investigandis dicta sufficiant. Imo, cum Problemata omnia de Curvarum Longitudine, de quantitate et superficie Solidorum, deque Centro Gravitatis, possunt eo tandem reduci, ut quaeratur quantitas Superficiei planae linea curva terminatae, non opus est quicquam de iis adjungere. In istis autem quo ego operor modo dicam brevissime.* Darauf fährt er unter der Aufschrift: *Applicatio praedictorum ad reliqua istiusmodi Problemata*, so fort: *Sit* (Fig. 9) *ABD Curva quaevis, et AHKB rectangulum, cujus latus AH vel BK est unitas. Et cogita rectam DBK uniformiter ab AH motam, areas ABD et AK describere; et quod BK* (1) *sit momentum, quo AK* (x)*, et BD* (y) *momentum, quo ABD gradatim*

Fig. 9.



augetur; et quod ex momento BD perpetim dato, possis per praedictas regulas aream ABD ipso descriptam investigare, sive cum area AK(x) momento 1 descripta conferre. Jam, qua ratione superficies ABD ex momento suo perpetim dato, per praecedentes regulas elicitur, eadem quaelibet alia quantitas ex momento suo sic dato elicietur. Dies wird durch die Rectification eines Kreisbogens erläutert; sodann fügt Newton, gewissermassen zur Verdeutlichung des ohne weitere Erklärung eingeführten Ausdrucks „*momentum*“ hinzu: *Sed notandum est, quod unitas ista, quae pro momento ponitur, est Superficies cum de Solidis, et Linea cum de Superficiebus, et Punctum cum de Lineis agitur. Nec vereor loqui de unitate in Punctis, sive Lineis infinite parvis, siquidem proportiones ibi jam contemplantur Geometrae, dum utuntur methodis Indivisibilium. Ex his fiat conjectura de Superficiebus et quantitatibus Solidorum, ac de Centro Gravitatum.* Aus dem Zusammenhang ergiebt sich, dass Newton das Wort „*momentum*“ hier gebraucht in dem Sinne von Cavaleri's *regulae*, ohngefähr in der Bedeutung von *elementum momentaneum*, so dass es die in der Zeiteinheit durch die Bewegung beschriebene Grösse bezeichnet. Demnach verfährt Newton ebenso wie Barrow in seiner Tangentenmethode: er schliesst aus den unendlichkleinen Veränderungen der durch die Bewegung hervorgebrachten Grösse auf die Grösse selbst.

Aus dem, was Newton in dieser ersten Schrift niedergelegt hat, erhellt offenbar, dass er das Princip, auf dem die gemeinsame Lösung der Probleme der höheren Analysis beruht, erkannt hatte; noch fehlte aber der Algorithmus der Methode. —

Einige Jahre später, im Jahre 1671, beabsichtigte Newton Kinckhuysen's Algebra*) mit Anmerkungen und Zusätzen vermehrt in einer neuen Ausgabe erscheinen zu lassen. Als Einleitung wollte er eine Abhandlung über die Fluxionsrechnung vorausschicken, um angehende Mathe-

---

*) *Gerh. Kinckhuysen Algebra of te Stelkonst. Harlem* 1661. 4.

matiker mit seinen Entdeckungen bekannt zu machen.*) Demgemäss sah er sich genöthigt, das in seiner ersten Schrift zusammengestellte Material zu ordnen und wissenschaftlich zu begründen. Diese Abhandlung war bereits zum grössten Theil vollendet, als Newton das ganze Vorhaben aufgab. Sie erschien erst nach seinem Tode im Jahre 1736 von Colson ins Englische übersetzt.**)

Diese Abhandlung ist sowohl für die Geschichte der Fluxionsrechnung überhaupt, als insbesondere zur Beurtheilung, in welchem Zustande sie sich um das Jahr 1671 befand, von der höchsten Wichtigkeit, da Newton, wie er selbst sagt, darin eine Anleitung zur Kenntniss seiner neuen Methode zu geben beschlossen hatte.

Im Allgemeinen ist zu bemerken, dass Newton auch in dieser Abhandlung den historischen Gang, wie er zu seinen Entdeckungen in der höheren Analysis gelangte, beibehält. Er schickt die Entwickelung der Quotienten in Reihen mittelst Division, die Ausziehung der Quadratwurzel und die *Resolutio aequationum affectarum* als Hülfsoperationen für das Folgende voraus, und macht alsdann den Uebergang zur Lehre von den Fluxionen mit folgenden Worten: *Jam restat, ut, in illustrationem Artis Analyticae, tradam aliquot Problematum specimina, qualia praesertim natura Curvarum ministrabit. Sed inprimis observandum venit, quod hujusmodi difficultates possunt omnes ad haec duo tantum Problemata reduci, quae circa spatium motu locali, utcunque accelerato vel retardato, descriptum ponere licebit.* Es sind dies die beiden Fundamentalprobleme, durch deren Lösung Newton zum Princip der Fluxionsrechnung gelangte: *Spatii longitudine continuo (sive ad omne tempus) data, Celeritatem Motus ad tempus propositum invenire,* und: *Celeritate Motus continuo data,*

*) *Placuit sequentia, quibus campi analytici terminos expandere, juxta et Curvarum doctrinam promovere possem, in gratiam discentium breviter compingere.*

**) *The method of fluxions, translated from the latin by Colson. Lond.* 1736. 4. — Castillion übersetzte diese Schrift wiederum ins Lateinische und liess sie unter der Aufschrift: *Methodus fluxionum et serierum infinitarum cum ejusdem applicatione ad curvarum geometriam*, in seiner Ausgabe von Newton's *Opusc.* abdrucken. Horsley hat das lateinische Original unter dem Titel: *Geometria analytica*, in Newton's gesammelten Schriften aufgeführt.

longitudinem descripti spatii ad tempus propositum invenire. Ehe Newton zur Lösung des ersten Problems übergeht, erläutert er dasselbe an einem Beispiel und spricht sich namentlich darüber aus, dass er die Zeit als eine mit den übrigen homogene, durch eine gleichmässig fliessende Bewegung (*aequabili fluxione*) entstandene Grösse auffasst, auf welche alle übrigen Grössen bezogen gedacht werden könnten. Die durch die Bewegung entstehende Raumgrösse nennt er die fliessende (*fluens*), die der Bewegung zukommende Geschwindigkeit *fluxio*; jene wird durch $x, y, z \ldots$ bezeichnet, diese beziehungsweise durch die Zeichen $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ $\ldots$ ausgedrückt. Die Lösung des ersten Problems selbst, die durch mehrere Beispiele erläutert wird, erinnert zu sehr an die Behandlung des Tangentenproblems durch Hugens und de Sluze, als dass nicht die Vermuthung entstehen sollte, dass Newton das in Rede stehende Problem zuerst lediglich für Curven gelöst hätte. Es erhellt dies besonders noch aus den beigebrachten Beispielen, in welchen, wenn drei Veränderliche vorkommen, die dritte durch die beiden andern bestimmt wird, desgleichen dass Wurzelausdrücke und Quotienten nicht direkt, wie es die höhere Analysis bewirkt, sondern durch Substitution einer andern Veränderlichen behandelt werden. — Das zweite der obigen Probleme, welches das umgekehrte vom ersten ist, löst Newton durch dieselben Operationen, nur in umgekehrter Reihenfolge. Er unterscheidet hierbei die Fälle: 1) wenn die gegebene Gleichung zwei Fluxionen und eine Fluente derselben enthält; 2) wenn zwei Fluenten zugleich mit ihren Fluxionen, und 3) wenn mehr als zwei Fluxionen darin vorkommen. — Dies ist die allgemeine Grundlage der Fluxionsrechnung. Es folgen nun Anwendungen derselben auf die Bestimmung der Maxima und Minima, auf Tangenten, auf die Bestimmung der Grösse und Beschaffenheit der Krümmung der Curven, wobei die zweite Fluxion von y vermieden wird, indem Newton $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = z$ setzt und die Fluxion von z bestimmt, so dass $\dot{y} = \dot{z}\,\dot{x}$ wird; ferner auf Quadraturen und Rectificationen von Curven.

Obwohl die *Methodus fluxionum* in ihrem letzten Theile unvollendet ist*), so beweist dennoch ihr Umfang, so wie der Reichthum an

*) Pemberton (in der Vorrede zur *View of Sir Isaac Newton's Phi-*

Beispielen, in wie hohem Grade Newton zur Zeit ihrer Abfassung Herr seiner neuen Rechnung war. Es erhellt daraus, dass Newton bereits um das Jahr 1671 im Besitz aller derjenigen Mittel war, welche zur Bewältigung der Probleme der höheren Mathematik erforderlich sind; durch sie vermochte er die Untersuchungen über die Bewegung der Himmelskörper zu vollenden, die ihm den Kranz der Unsterblichkeit brachten. — Hier und da findet sich die Ansicht ausgesprochen, dass Newton in Bezug auf die Begründung und vielleicht auch hinsichtlich des ganzen Wesens seiner neuen Rechnung sich selbst nicht genügt habe; er würde sie sonst, meint man, seinem berühmten Werke: *Principia philosophiae naturalis mathematica, Londin.* 1687, dessen Inhalt als ein Ergebniss der Fluxionsrechnung zu betrachten ist, unverhüllt zu Grunde gelegt haben. Bei diesem Urtheil übersieht man, dass Newton's Bestreben dahin gehen musste, die in diesem Werke niedergelegten bewundrungswürdigen Resultate seiner Forschungen auf einem sichern, unumstösslichen Fundament zu begründen; er wollte nur die Hülfsmittel gebrauchen, deren Gültigkeit allgemein anerkannt war, und er erwählte deshalb den rein geometrischen Weg. So nur vermochte er ein Meisterwerk aus einem Guss zu schaffen, welches für die Erforschung der Gesetze des Weltalls immer der Ausgangspunkt bleiben wird. Das Fundament der Fluxionsrechnung ist aber die Gränzmethode, wie sie in den Schriften der griechischen Geometer niedergelegt ist; auf dieser Basis war für Newton die Fluxionsrechnung entstanden und demnach das sicherste Fundament derselben. Er ersetzte deshalb, in Uebereinstimmung mit der rein geometrischen Fassung des gesammten Werkes, die Fluxionsrechnung durch die Gränzmethode und schickte in der ersten Section des ersten Buches der *Principia* die *„methodus rationum primarum et ultimarum,* in 11 Lemmaten als Grundlage für das Folgende voraus. In dem Scholium, womit diese erste Section des ersten Buches der *Principia* schliesst, sagt Newton ausdrücklich: *Prae-*

---

losophy) erzählt, dass er Newton bewogen habe, diese Abhandlung noch bei seinen Lebzeiten herauszugeben. Da aber der letzte Theil der Abhandlung unvollendet war, so war Newton im Begriff, ihm noch andere Papiere, um das Fehlende zu ergänzen, mitzutheilen, als sein Tod die Ausführung dieses Planes hinderte. Sieh. Brewster S. 155.

misi haec lemmata, ut effugerem taedium deducendi longas demonstrationes, more veterum geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis et propterea methodus illa minus geometrica censetur, malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas et rationes, primasque nascentium, id est, ad limites summarum et rationum deducere; et propterea limitum illorum demonstrationes qua potui brevitate praemittere. His enim idem praestatur quod per methodum indivisibilium, et principiis demonstratis jam tutius utemur. Proinde in sequentibus, fährt Newton fort, *si quando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas, nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia, non summas et rationes partium determinatarum, sed summarum et rationum limites semper intelligi, vimque talium demonstrationum ad methodum praecedentium lemmatum semper revocari.* — Mit dieser Auffassung ist denn auch in vollkommenster Uebereinstimmung die Stelle (*Princip. lib. II. lem. II. Schol.*) — die einzige im ganzen Werke — in welcher Newton die Fundamentaltheoreme der Fluxionsrechnung erwähnt und zugleich bemerkt, dass das Princip derselben in dem vorausgehenden Lemma enthalten sei*). In diesem Lemma entwickelt er die Grundzüge der Fluxionsrechnung, ohne sich jedoch irgend eines Algorithmus zu bedienen. Newton führt daselbst den Ausdruck „*momentum*“ ein, dessen Begriff er folgendermassen zu definiren versucht: *Quantitates, ut indeterminatas et instabiles, et quasi motu fluxuve perpetuo crescentes vel decrescentes, hic considero; et earum incrementa vel decrementa momentanea sub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis seu affirmativis, ac decrementa pro subductitiis seu negativis ha-*

*) In dem erwähnten Scholium gedenkt Newton auch seiner Correspondenz mit Leibniz und erklärt, dass dieser ihm ungefähr 10 Jahre früher eine ähnliche Methode, die dasselbe leistete, als die Fluxionsrechnung, mitgetheilt habe. Als nun der Streit über den ersten Entdecker der Differentialrechnung entbrannte, benutzten die Vertheidiger der Rechte Leibnizens diese Erklärung Newton's zu Gunsten des ersteren; aus diesem Grunde wurde in der dritten Ausgabe der *Principia*, welche im Jahre 1725 erschien, das erwähnte Scholium unterdrückt und durch ein anderes ersetzt.

beantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulae finitae non sunt momenta, sed quantitates ipsae ex momentis genitae. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum. Neque enim spectatur in hoc lemmate magnitudo momentorum: sed prima nascentium proportio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas enim motus, mutationes et fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitae quaevis quantitates velocitatibus hisce proportionales. —

Noch ist die kleine Abhandlung über die Principien der Fluxionsrechnung zu erwähnen, welche Newton als Einleitung zu der Schrift: *Tractatus de quadratura curvarum,* vorausgeschickt hat. Er veröffentlichte die letztere zugleich mit einer andern: *Enumeratio linearum tertii ordinis,* in der ersten Ausgabe seiner Optik im Jahre 1704. In dieser kleinen Abhandlung tritt Newton zum ersten Mal mit der Fluxionsrechnung vor die Oeffentlichkeit, und da von den Schriften über die Fluxionen sie allein von Newton selbst herausgegeben ist, so verdient sie eine besondere Beachtung. — Es liegt die Vermuthung nahe, dass Newton das Erscheinen seiner Optik benutzte, um sein Recht auf die Erfindung der Fluxionsrechnung öffentlich in Anspruch zu nehmen, nachdem bereits im Jahre 1699 Fatio de Duillier den Streit über den Erfinder der Differentialrechnung begonnen und gegen Leibniz den ersten Angriff geschleudert hatte*). Aus diesem Grunde schickte Newton die erwähnte kleine Abhandlung voraus, in welcher er in gedrängter Kürze, aber bestimmt und klar die Principien der Fluxionsrechnung und die Zeit ihrer Erfin-

---

*) Nicolas Fatio de Duillier, aus Genf gebürtig, hatte längere Zeit mit Hugens zusammengelebt und die Achtung und Freundschaft desselben sich zu erwerben gewusst. Von Holland ging Fatio nach London; er kam mit Newton in Berührung und gewann dessen Vertrauen. Aus den Briefen, die er von hier aus an Hugens in den Jahren 1691 und 1692 schrieb und die Uylenbroek (*Ch. Hugenii aliorumque saeculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae. Hagae Comit.* 1833. *Fasc. II. p.* 98 *sqq.*) herausgegeben hat, erhellt, dass der Angriff gegen Leibniz längst vorbereitet war. Wir werden in der Geschichte des Streites über den ersten Erfinder der Differentialrechnung auf diesen Punkt wieder zurückkommen.

dung bespricht, und mithin alles das erwähnt, was für den vorliegenden Zweck von Bedeutung ist. In Uebereinstimmung mit dem, was Newton über die Entstehung der geometrischen Grössen in den *Princip. math. phil. nat.* niedergelegt, beginnt er auch hier damit, dass er die mathematischen Grössen nicht aus unendlich kleinen Theilen zusammengesetzt, sondern durch continuirliche Bewegung erzeugt betrachtet. *Hae Geneses,* setzt er hinzu, *in rerum natura locum vere habent, et in Motu corporum quotidie cernuntur.* Ebenso geht Newton hinsichtlich der Auffassung der Fluxionen von demselben Gesichtspunkte aus; er betrachtet sie als Gränzverhältnisse und stellt als Fundamentalsatz auf: *Fluxiones sunt quam proxime ut Fluentium Augmenta aequalibus Temporis particulis quam minimis genita, et, ut accurate loquar, sunt in prima Ratione Augmentorum nascentium; exponi autem possunt per Lineas quascunque, quae sunt ipsis proportionales.* Nachdem Newton diesen Satz durch mehrere Beispiele erläutert, fügt er noch die folgende Bemerkung hinzu: *Similibus argumentis, per Methodum Rationum primarum et ultimarum, colligi possunt Fluxiones Linearum, seu rectarum seu curvarum, in casibus quibuscunque, ut et Fluxiones Superficierum, Angulorum et aliarum Quantitatum. In finitis autem Quantitatibus Analysin sic instituere, et finitarum nascentium vel evanescentium Rationes primas vel ultimas investigare, consonum est Geometriae Veterum; et volui ostendere quod in Methodo Fluxionum non opus sit Figuras infinite parvas in Geometriam introducere. Peragi tamen potest Analysis in Figuris quibuscunque, seu finitis seu infinite parvis, quae Figuris evanescentibus finguntur similes, ut et in Figuris, quae per Methodos Indivisibilium pro infinite parvis haberi solent, modo caute procedas.* — In der nun folgenden Schrift: *De quadratura curvarum,* handelt Newton zuerst über den Begriff der ersten, zweiten, dritten u. s. w. Fluxion und wie die eine aus der andern entsteht; er giebt ihre Bezeichnung durch ein, zwei, drei u. s. w. Punkte und erläutert in dem ersten Problem, wie zu einer gegebenen Gleichung die Fluxionsgleichung gefunden werden kann. Auf denselben Gegenstand kommt er in dem Scholium, mit welchem die Abhandlung schliesst, zurück; er sagt: *Quantitatum fluentium Fluxiones esse primas, secundas, tertias, quartas, aliasque, diximus supra. Hae Fluxiones sunt ut Termini Serierum infinitarum convergentium. Ut si* z^n *sit Quantitas fluens et fluendo evadat* $\overline{z+0}^n$, *deinde resolvatur in Se-*

riem convergentem $z^n + n0z^{n-1} + \frac{nn-n}{2}00\,z^{n-2} + \frac{n^3-3nn+2}{6}0^3z^{n-3} +$ *etc. Terminus primus hujus Seriei* z^n *erit Quantitas illa fluens, secundus* $n0z^{n-1}$ *erit ejus Incrementum primum seu Differentia prima, cui nascenti proportionalis est ejus Fluxio prima; tertius* $\frac{nn-n}{2}00z^{n-2}$ *erit ejus Incrementum secundum seu Differentia secunda, cui nascenti proportionalis est ejus Fluxio secunda; quartus* $\frac{n^3-3nn+2n}{6}0^3z^{n-3}$ *erit ejus Incrementum tertium seu Differentia tertia, cui nascenti Fluxio tertia proportionalis est, et sic deinceps in infinitum.* Der Fehler, welchen Newton hinsichtlich des Werthes der zweiten, dritten u. s. w. Fluxion im Vorstehenden macht, findet sich bereits pag. 263 der ersten Ausgabe der *Principia* vom Jahre 1687; es ist eine auffallende Erscheinung, dass derselbe Fehler beinahe 20 Jahre später in diesem Scholium sich wiederholt. Joh. Bernoulli rügt dieses Versehen in seinen Briefen an Leibniz (*Commerc. epistol. Tom. II. p.* 294) und zieht den Schluss, dass Newton damals noch keine klare Vorstellung über die Werthe der Fluxionen höherer Ordnungen gehabt habe. Derselbe zeigt zugleich (*Commerc. epist. Tom. II. p.* 310), dass Newton in diesem Irrthum bis zum Jahre 1711 geblieben sei, denn um diese Zeit habe sein Neffe, Nicolaus Bernoulli, auf einer Reise durch England von Newton ein Exemplar des eben erschienenen Werkes: *Analysis per quantitatum series, fluxiones ac differentias, cum enumeratione linearum tertii ordinis**), zum Geschenk erhalten, in welchem bei der Stelle „*tertius* $\frac{nn-n}{2}00z^{n-2}$ *ejus incrementum secundum, et quartus* $\frac{n^3-3nn+2n}{6}0^3z^{n-3}$ *erit ejus incrementum tertium*“ das Wort „*ut*“ beigeschrieben sei, so dass es nun hiesse „*erit ut ejus*“ *etc.* Deshalb vermuthet Joh. Bernoulli, dass Newton entweder kurz vor dieser Zeit seinen Irrthum bemerkt habe, oder auch von seinem Neffen eines Besseren belehrt worden sei.

---

*) Es ist dies eine von Jones im Jahre 1711 herausgegebene Sammlung von Newton's kleinern Schriften, darunter auch die Abhandlung: *De quadratura curvarum.*

Wir schliessen hiermit die Betrachtung über die Principien der Fluxionsrechnung, soweit sie sich aus Newton's Schriften ergeben. Es ist noch übrig, den Zeitpunkt festzustellen, von dem die Entdeckung der Fluxionen zu datiren ist.

In der Einleitung zu der Schrift: *De quadratura curvarum,* bezeichnet Newton die Jahre 1665 und 1666, in welchen er nach und nach auf die Fluxionsrechnung gekommen sei. *Considerando* — so lauten seine Worte — *quod Quantitates aequalibus Temporibus crescentes et crescendo genitae, pro Velocitate majori vel minori qua crescunt ac generantur, evadunt majores vel minores, Methodum quaerebam determinandi Quantitates ex Velocitatibus Motuum vel Incrementorum, quibus generantur; et has Motuum vel Incrementorum Velocitates nominando Fluxiones, et Quantitates genitas nominando Fluentes, incidi paulatim annis* 1665 *et* 1666 *in Methodum Fluxionum, qua hic usus sum in Quadratura Curvarum.* In vollkommenster Uebereinstimmung hiermit sind die Angaben, die sich unter den Bemerkungen finden, mit welchen Newton Leibnizens Brief an Conti vom 9. April 1716 begleitet hat. Da Newton hier sehr ausführliche Mittheilungen sowohl über den Zeitpunkt als über die Weise der Entstehung der Fluxionen giebt, so ist die ganze Stelle für den vorliegenden Zweck von Interesse und mag vollständig folgen. *Mais n'ai je pas,* sagt Newton, *un droit égal de me rendre témoignage à moi-même, et d'assurer que j'ai inventé les méthodes des Suites et des Fluxions dans l'année* 1665: *que je les ai poussées plus loin dans l'année* 1666: *qu'à présent j'ai entre les mains plusieurs papiers Mathématiques écrits en* 1664, 1665 *et* 1666, *dont quelques-uns sont avec date, parmi lesquels il s'en trouve un, dont la date est du* 13. *Novembre* 1665, *lequel contient la directe méthode des Fluxions en ces termes:*

Probl. Etant donnée une Equation exprimant la relation de deux ou plusieurs lignes x, y, z etc. décrites dans le même temps, par deux ou plusieurs Mobiles A, B, C etc. trouver la relation de leurs vitesses p, q, r etc.

Solut. Mettez tous les termes d'un seul côté de l'Equation, en sorte qu'ils soient égaux à zéro: multipliez chaque terme par autant de fois $\frac{p}{x}$ que x a de dimensions dans ce terme: Secondement multipliez *chaque terme par autant de fois* $\frac{q}{y}$ *que y a de dimensions dans ce terme: Troisièmement multipliez chaque terme par autant de fois* $\frac{r}{z}$ *que z a de dimensions dans ce terme etc. et la somme de ces produits sera égale à zéro, laquelle équation donne la relation de p, q, r etc.*

Obgleich vorstehendes Problem sowohl, als dessen Lösung mit dem ersten Fundamentalproblem der Fluxionsrechnung, wie es Newton in der *Methodus fluxionum* giebt, im Grunde übereinstimmen, so ist doch als wesentlich zu bemerken, dass gegen Ausgang des Jahres 1665 Newton noch nicht im Besitz der von ihm später gebrauchten Bezeichnung der Fluxionen war, eine Sache, deren Wichtigkeit für die Feststellung der Entdeckung der neuen Methode von Jedem eingeräumt werden muss.

Newton fährt so fort: *Je puis ajouter que cette Solution y est illustrée par plusieurs exemples: qu'elle y est démontrée, et qu'elle y est appliquée à des Problêmes qui regardent les Tangentes et les Curvatures des Courbes: qu'un autre papier, dont la date est du* 16. *Mai* 1666 *contient en sept Propositions une méthode générale de résoudre les Problêmes qui regardent le mouvement; et que la dernière de ces Propositions est la même que le problême mentionné ci-dessus, daté du* 13. *Novembre* 1665. *Que dans un petit Traité, écrit au mois de Novembre* 1666, *lesdites sept Propositions sont encore répétées, avec cette différence, que la septième y est poussée jusques-là que de n'être point arrêtée par les fractions ou les quantités sourdes, ni même par celles qu'on appelle à présent Transcendantes: qu'une huitième Proposition est ajoutée à ce Traité, contenant la Méthode Inverse des Fluxions, telle que je l'avois en ce temps-là: c'est-à dire, autant qu'elle peut dépendre de la Quadrature des Figures curvilignes des trois Règles, sur lesquelles est fondée mon Analyse per Aequationes numero terminorum infinitas, et de la plûpart des autres Théorêmes contenus dans le Scholium de la dixième Proposition de mon livre des Quadratures: que dans ce Traité, lorsque l'Aire provenante de quelqu'un des termes de l'Ordonnée ne peut pas être exprimée par l'Analyse vulgaire, elle est représentée en écrivant le Symbole* $\square$ *au devant de ce terme: par exemple, si l'Abscisse est x, et* *l'Ordonnée* $ax - b + \frac{bb}{a+x}$, *l'Aire total est* $\frac{1}{2}axx - bx + \boxed{\cdot}\,\frac{bb}{a+x}$: *que dans ce Traité je me suis quelquefois servi de lettres marquées d'un seul point, pour dénoter des quantités qui enveloppoient des Fluxions premières, et quelquefois de mêmes lettres marquées de deux points pour des quantités qui enveloppoient des Fluxions secondes: qu'un Traité plus ample que j'avois écrit en* 1671, *et mentionné dans ma lettre du* 24. *Octobre* 1706, *étoit fondé sur ce petit Traité, et commençoit par la reduction des Quantités finies en Suites convergentes, et par la Solution de ces deux Problêmes:* 1. ***Relatione Quantitatum fluentium inter se data, Fluxionum relationem determinare;*** 2. ***Exposita aequatione Fluxiones Quantitatum involvente, invenire relationem Quantitatum inter se;*** *et que, lorsque j'écrivois ce Traité, j'avois rendu mon Analyse si universelle, par le moyen de la méthode des Suites et de la méthode des Fluxions jointes ensemble, qu'elle s'étendoit à presque toute sorte de Problêmes: ce que j'ai mentionné dans ma lettre du* 13. *de Juin* 1676; *et que c'est là cette Méthode que j'avois décrite dans ma lettre du* 10. *Décembre* 1672. — Zweierlei ist aus dem letzteren hervorzuheben: erstens dass Newton sagt, er habe in der kleinen Abhandlung vom November des Jahres 1666 die Lösung des oben mitgetheilten Problems so erweitert, dass sie nicht „*par les fractions ou les quantités sourdes, ni même par celles qu'on appelle à présent Transcendantes*“ aufgehalten werde; und zweitens, dass er in derselben Abhandlung zur Bezeichnung der ersten und zweiten Fluxion eines und zweier Punkte zuweilen (*quelquefois*) sich bedient habe. Demnach dürften die Anfänge der Fluxionsrechnung nur erst von dem Ausgang des Jahres 1666 zu datiren sein; ihre allmälige Ausbildung und Vervollkommnung würde alsdann in die Jahre von 1666 bis 1671 fallen, in welchem letzteren Newton die *Methodus fluxionum* verfasste. Diese allmälige Fortbildung der Fluxionsrechnung stimmt auch mit der Art und Weise der Entdeckung überein, insofern Newton, wie im Vorgehenden gezeigt ist, auf dem durch Archimedes eingeschlagenem Wege vorwärts schritt und so zur Erkenntniss des Princips der neuen Theorie gelangte.

Wenn wir schliesslich die Wege vergleichen, auf welchen Newton und Leibniz zur Entdeckung der höheren Analysis gelangten, so zeigt die historische Entwickelung, dass Newton die Grundlage, welche von Archimedes zur Behandlung der Probleme der höheren Mathematik geschaffen und die in späterer Zeit zum Theil verallgemeinert worden war, fortzubilden und zu vervollkommnen verstand und auf dieser Basis das neue Gebäude errichtete. Die Fluxionsrechnung ist demnach auf dem naturgemässen Wege, ohne Beimischung anderer Hülfsmittel, entstanden. Daher ruht auch Newton's Auffassung des Princips der höheren Analysis auf einem vollkommen sicheren Fundament, auf dem Begriffe der ersten und letzten Verhältnisse d. i. auf dem Begriffe der Gränze. Diese feste Begründung hat die Theorie der Fluxionen vor der Differentialrechnung voraus. Dagegen erschweren die geometrischen Vorstellungen, mit deren Hülfe die Bildung der Fluxionen geschieht, die Einsicht in das Wesen und die Anwendung der Fluxionsrechnung zur Lösung von Problemen; besonders aber ist der Mangel einer bequemen Bezeichnung fühlbar. Er hat die weitere Ausbildung und Vervollkommnung der Theorie der Fluxionen wesentlich gehemmt. — Auch Leibnizens Differentialrechnung ist aus Methoden hervorgegangen, deren Entstehung in der sogenannten Exhaustionsmethode Archimed's gefunden wird, die aber von dem ursprünglichen Verfahren so vieles abgestreift hatten, dass die Verbindung mit der lauteren Quelle stark getrübt und die Rückkehr zu derselben mit grossen Schwierigkeiten verknüpft war. Vorstellungen, die durch die strenge Weise der griechischen Geometer vermieden worden waren, traten in jenen Methoden offen zu Tage; sie fanden Aufnahme in der neuen Rechnung und spielten, wie in den frühern Methoden, auch hier eine Hauptrolle. Diese Schwierigkeiten wurden noch dadurch erheblich vermehrt, dass zugleich mit der Einführung des neuen Algorithmus arithmetische Begriffe mit dem ursprünglichen Princip in Verbindung gebracht wurden. Indess kann nicht geläugnet werden, dass die unbestimmte Vorstellung des Unendlichkleinen die Einsicht in den Mechanismus der Differential- und Integralrechnung wesentlich erleichtert und ihre Ausbildung und staunenswerthe Vervollkommnung gefördert hat. Hierzu kommt, dass die höchst glückliche Bezeichnung, welche von Leibniz zur Darstellung der Differentiale und Integrale eingeführt wurde, sich auf das innigste an die Entstehung der genannten Grössen anschmiegte, und das Verständniss und den Gebrauch derselben in hohem Grade vereinfachte und, so zu sagen, durchsichtig machte. Diese glückliche Bezeichnung enthielt gewissermassen in sich selbst die Keime neuer Rechnungsweisen, und daher erweiterte sich die neue Schöpfung in so kurzer Zeit zu einem Gebäude von bewundrungswürdiger Ausdehnung. Aber der imposante Bau ruhte auf unsicherem Fundament; wenn auch die Mathematiker ersten Ranges von der Zuverlässigkeit der neuen Methode überzeugt waren und aus diesem Grunde die Feststellung des Princips unterliessen, so erhoben sich jedoch bald Bedenklichkeiten, Zweifel und Angriffe gegen die Sicherheit desselben von Seiten derer, welchen der Ueberblick über das Ganze mangelte. Ehe noch Newton's Theorie zur allgemeinen Kenntniss gelangte, war bereits die Differentialrechnung überall im Gebrauch; ja sie drang sogar in das Geburtsland der Fluxionsrechnung, und deshalb wurde der Vorzug, welchen die letztere vor jener voraus hatte, übersehen und blieb für die feste Begründung des Princips der höheren Analysis unbeachtet.

Beilagen.

I.

Ueber die Entstehung und Ausbreitung des dekadischen Zahlensystems.

Unter allen Schöpfungen, die wir in dem Bereich der mathematischen Disciplinen zunächst durch die Vermittelung der Araber erhalten haben, nimmt das dekadische Zahlensystem die erste Stelle ein. Dasselbe hat auf die Entwickelung der mathematischen Wissenschaften einen mächtigen Einfluss geübt. Es dürfte deshalb eine ausführliche Betrachtung über die Entstehung und Ausbreitnng des dekadischen Zahlensystems in einer Schrift, deren Inhalt der geschichtlichen Darstellung der gesammten höheren Mathematik gewidmet ist, gerechtfertigt erscheinen. —

Was zuerst den Ursprung des dekadischen Zahlensystems betrifft, so stehen zwei Ansichten einander gegenüber. Die eine, ursprünglich mehr durch Tradition und durch die Aussagen älterer Schriftsteller getragen, behauptet, dass wir das dekadische Zahlensystem zunächst den Arabern verdankten, die es von den Indern entlehnt hätten. Die andere Ansicht ist neueren Ursprungs; ihre Anhänger haben auf Grund einer Stelle am Schluss des ersten Buches der Geometrie des Boethius die Meinung aufgestellt, dass das dekadische Zahlensystem bereits dem Pythagoras und seinen Schülern bekannt gewesen sei. Diese letztere Ansicht ist in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts durch Weidler, den bekannten Verfasser der *Historia Astronomiae* zur Geltung gebracht*), zu

*) Weidler, de characteribus numerorum vulgaribus et eorum aetatibus veterum monimentorum fide illustratis. Witemb. 1727. — Weidler,

Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts von Mannert wieder angeregt*), und in neuester Zeit durch Chasles, den Geschichtschreiber der Geometrie, Libri gegenüber im Schoosse der französischen Akademie der Wissenschaften mit grosser Lebhaftigkeit vertheidigt worden.**)

Wir wollen zunächst die Haltbarkeit dieser zweiten Ansicht prüfen. Um dafür eine feste Grundlage zu gewinnen, ist es nöthig, die Ergebnisse der neuesten Forschungen über die Lehre des Pythagoras und seiner Schüler und namentlich über die von ihnen hinterlassenen Schriften in Betracht zu ziehen.

Erst in neuerer Zeit, besonders durch die mustergültigen Untersuchungen Böckh's (Philolaus, Berlin 1819) und Gruppe's (Ueber die Fragmente des Archytas und der älteren Pythagoreer, Berlin 1840) sind hinlänglich sichere Kriterien aufgestellt worden, um aus den überaus zahlreichen pythagoreischen Fragmenten die wenigen ächten auszuscheiden. Zugleich hat man dadurch auch eine bestimmtere Ansicht über das Wesen der alt-pythagoreischen Lehre gewonnen. „Die pythagoreische Philosophie ist eine dorische, und sie hat wesentlichen Zusammenhang mit dem Charakter dieses griechischen Volksstammes. Ernst, Maass, Besonnenheit, das ist es, was sie in allen Dingen sucht. Es ist nicht zufällig, dass sie sich der Geometrie und Arithmetik zuwandte, denn hier giebt es eine strenge Norm, hier herrscht eine sichere Demonstration, im Gegensatz der umherschweifenden Vermuthung, welche wie bei den Joniern, bald von dieser, bald von jener einseitigen Beobachtung ausgehend, nach einander in verschiedenen materiellen Stoffen das Urprincip der Dinge sucht. Maass und Zahl herrschen in der Bewegung der Himmelskörper, Maass und Zahl herrschen in der Kunst, zunächst bestimmen sie in der Musik die Harmonie, und die Tugend und alle Weisheit schien eben nichts anderes zu sein. Dies ist der Mittelpunkt der

---

spicilegium observationum ad historiam notarum numeralium pertinentium. Witemb. 1755.

*) Mannert, de numerorum quos Arabicos vocant vera origine. Altdorf. 1801.

**) Chasles Geschichte der Geometrie, deutsch von Sohncke, Halle 1849. — Chasles in den Comptes rendus de l'Acad. des Sciences. Tom. VIII. IX. XVI. XVII.

grossartigen und ewig denkwürdigen Lehre, für deren Verständniss und Schätzung aber schon dem Aristoteles der Standpunkt fehlte." (Gruppe S. 33 f.). Bei der Sitte, eines möglichst kurzen Ausdrucks sich zu bedienen, und da es ursprünglich Princip des pythagoreischen Ordens war, die Hauptlehren nur einem kleinen Kreise Auserwählter mündlich mitzutheilen, so war nichts natürlicher, als dass Pythagoras und seine Schüler, um dem grossen Haufen das Verständniss zu verschliessen und ihm zugleich gewissermassen zu imponiren, ihre Zuflucht zu einer Symbolik nahmen — vielleicht nach dem Beispiel des Orients und Aegyptens — wodurch sie ihre Philosopheme künstlich verschleierten. Dem Obigen zufolge darf es nicht befremden, dass sie dazu mathematische Symbole, die Zahl und die geometrischen Formen, gebrauchten. Besonders bedienten sie sich der Zahl, und deshalb ist die pythagoreische Philosophie eine Zahlenphilosophie genannt worden. „Im alten Pythagoreismus macht die Zahl zugleich als Stoff und als Gestalt das Wesen der Dinge aus, der sinnlichen Dinge. Durch die Zahl werden diese Dinge erkennbar; unerkennbar ist, was sich der Zahl nicht unterwirft. Die Zahlen selbst, durch welche die Erkenntniss geschieht, sind körperliche Existenzen" (Gruppe S. 73 f.). Die alten Pythagoreer nahmen die Zahlen als Musterbilder, deren Nachahmung die Dinge sind; sie waren durchdrungen von der Ueberzeugung, dass in den Zahlen und geometrischen Formen das Geheimniss des Weltalls verborgen liegt. So wurde ihnen die Zahl die Quelle der Erkenntniss. Das Geheimnissvolle, Mystische übt immer auf empfängliche Gemüther eine grosse Anziehung; aus diesem Grunde und da der pythagoreische Orden einen mächtigen Einfluss auf die Leitung der politischen Angelegenheiten anstrebte und auch, besonders zur Zeit des Archytas, wirklich erlangte, so hielten sich vorzüglich begabte Männer zu dem Verein. Es konnte nicht fehlen, dass diese Talente mit hoher Begeisterung sich dem Studium der Mathematik zuwandten, um durch Erforschung der Gesetze der mathematischen Grössen gewissermassen a priori zur Erkenntniss der Dinge zu gelangen. Hier entsteht nun die Frage, welche Hülfsmittel standen bei diesen Zahlenuntersuchungen den Pythagoreern zu Gebote? Bedienten sie sich der griechischen Zahlzeichen und der unter den Griechen gebräuchlichen Art und Weise zu rechnen, oder hatten sie andere Hülfsmittel?

Dass die Pythagoreer ein anderes Zahlensystem, als das griechische, gehabt hätten, etwa ein dem unsrigen ähnliches, in dem den Ziffern ausser ihrem absoluten noch ein Stellenwerth zuertheilt wird — davon findet sich in den als ächt erkannten alt-pythagoreischen Fragmenten nicht die geringste Spur. Aber, kann man hier einwenden, „die Pythagoreer fühlten kein Bedürfniss Schriften abzufassen, die mündliche Rede reichte, zumal in dem engen Kreise der einzelnen Städte, vollkommen aus, sie war lebendiger und wirksamer als das todte Wort, und steht ja auch mit dem ganzen Sinne dieses Ordens, der keine Schriftstellereitelkeit gestattete, und mit jener frühen Zeit, welche noch gar kein einigermassen ausgebildetes Schriftwesen kannte, in viel besserem Einklange" (Gruppe a.a.O.). Lassen wir diesen Einwurf gelten und nehmen wir an, dass die Pythagoreer irgend ein dem unsrigen ähnliches Zahlensystem besessen hätten, so würden sie es gewiss ihren Mitbürgern mitgetheilt, dasselbe würde weiter verbreitet worden sein und sich im gewöhnlichen Gebrauch erhalten haben. Es ist überflüssig zu bemerken, dass Archimedes, der dem Sitze des pythagoreischen Ordens so nahe lebte und zu demselben griechischen Volksstamm gehörte, gewiss davon Kunde erhalten, die Vorzüglichkeit vor dem griechischen Zahlensystem erkannt und desselben sich auch bedient haben würde. Im Gegentheil sind hinreichende Andeutungen vorhanden, dass die Pythagoreer die Zahlen sich gebildet dachten, nicht durch Position, sondern durch Addition und Multiplication. Sie nannten z. B. die Zehnzahl die vollkommene Zahl, weil sie aus $1+2+3+4$ entsteht und weil demnach in ihr die einfachsten, bei den übrigen zu Grunde liegenden Zahlen alle enthalten sind; sie legten ferner den Zahlen Eigenschaften bei, die ihnen in Rücksicht ihrer Factoren zukommen, z. B. der Zahl 12 die Eigenschaften, die den Zahlen 3 und 4 zuertheilt waren. Welch fruchtbares Feld der Speculation hätte sich ihnen eröffnet, wenn sie auf den glücklichen Gedanken gekommen wären, alle Quantitäten durch 9 Ziffern auszudrücken, indem sie ihnen einen absoluten und zugleich einen Stellenwerth gegeben hätten! — Hierzu kommt, dass der Tradition zufolge dem Pythagoras die Erfindung oder vielmehr die allgemeinere Einführung des sogenannten Abacus Pythagoricus oder der pythagoreischen Rechentafel (mensa geometricalis) zugeschrieben wird — einer Vorrichtung, deren man sich durch ganz Asien seit den ältesten Zeiten beim Rechnen bediente. Bekanntlich dient aber gerade diese Vorrichtung, um dem Mangel der Position abzuhelfen; mithin giebt dies Hülfsmittel den besten Beweis für unsere Behauptung, dass den Pythagoreern ein dem unsrigen ähnliches Zahlensystem unbekannt gewesen ist.

Es ist von Gruppe in der oben angeführten Schrift fast mit Gewissheit nachgewiesen worden, dass bei weitem die meisten der sogenannten pythagoreischen Fragmente von einem mit griechischer Bildung vertrauten Juden im 1. Jahrhundert nach Ch. zu Alexandrien gefälscht worden sind. Die Annahme, dass von dem Fälscher den Pythagoreern der Gebrauch besonderer, von den griechischen verschiedenen Zahlzeichen zugeschrieben wurde, klingt durchaus nicht unwahrscheinlich. Demselben konnte die Sage nicht unbekannt sein, dass Pythagoras Reisen im Orient und nach Aegypten gemacht; es lag mithin nahe, bei der Fälschung irgend ein Zahlensystem Aegyptens oder des Orients zu gebrauchen, ebenso wie er bei der Fälschung der Fragmente der pythagoreischen Philosophemen religiöse Vorstellungen der Juden beimischte. Er griff zu den arabischen Gobâr-Ziffern, die wegen der uralten Verbindung zwischen Juden und Arabern ihm nicht unbekannt sein konnten, und die wegen ihres Namens Gobâr (Staub) zu dem ursprünglich im Sande gezeichneten Abacus trefflich passten.*) Da nun die ersten Anfänge der Religionsphilosophie der

*) Die Gobâr-Ziffern wurden zuerst von Sylvestre de Sacy in einem arabischen Manuscript aus der Bibliothek der alten Abtei St. Germain du Près entdeckt und von ihm in seiner Grammaire Arabe Tom. I. planche VIII. bekannt gemacht. In diesem Zahlensystem giebt es neun Ziffern, die mit einem, zwei, drei u. s. w. darüber gesetzten Punkten versehen werden, um beziehungsweise Zehner, Hunderte, Tausende u. s. w. auszudrücken, was vielleicht zu ihrer Benennung gobâr d. h. Staub, Veranlassung gegeben hat. Man hat diese Gobâr-Ziffern häufig mit den indisch-arabischen verglichen und aus der äussern Aehnlichkeit auf eine Verwandtschaft der beiden Zahlensysteme schliessen wollen; sie unterscheiden sich aber sehr bestimmt dadurch von einander, dass in dem Gobâr-System die Punkte über den Ziffern stehen bleiben, wenn noch andere Ziffern nachfolgen, anstatt in dem indisch-arabischen System die Nullen verschwinden; in dem Gobâr-System ist mithin keine Spur von Position, sondern der Werth der Ziffern wird durch hinzugefügte apices (Punkte) angezeigt. — Die jüdischen Commentatoren der Cabbala und die

Juden, der sogenannten Cabbala, bis in das 2. Jahrhundert nach Ch. sich verfolgen lassen, und da pythagoreische Lehren vorzugsweise darin verwebt wurden — es entstand sogar die Mythe, dass Pythagoras der Erfinder der Cabbala sei — so ist nicht zu verwundern, wenn die von dem Fälscher den Pythagoreern beigelegten Ziffern in der Cabbala Aufnahme fanden, und dass ähnlich wie bei den Pythagoreern, die Zahlen in der Cabbala gebraucht wurden, um etwas Geheimnissvolles, Mystisches auszudrücken, so wie auch als astrologische Figuren. Diese jüdische Geheimlehre fand unter den Christen viele Anhänger, und so wurden denselben jene Zahlzeichen bekannt.*) Für die Wahrscheinlichkeit unserer Annahme, dass nämlich die in der fraglichen Stelle des **Boethius** vorkommenden Zahlzeichen arabischen Ursprungs sind, sprechen noch die Namen, die diesen Zahlzeichen daselbst beigelegt werden; sie lassen sich sämmtlich auf arabische Formen zurückführen und liefern mithin einen neuen Beitrag zu der Behauptung, dass die damit bezeichneten Ziffern als unterschoben betrachtet werden müssen.

Fassen wir das Bisherige noch einmal kurz zusammen, so ergiebt sich daraus, dass in den als ächt erkannten alt-pythagoreischen Fragmenten nicht die geringste Spur eines Zahlensystems mit Position sich findet, dass vielmehr ziemlich sichere Andeutungen vom Gegentheil vorhanden sind; und zweitens, dass wenn in den pythagoreischen Fragmenten andere als griechische Zahlzeichen vorkommen, diese als in späterer Zeit untergeschoben anzusehen sind.

---

jüdischen Mathematiker des frühen Mittelalters scheinen sich vorzugsweise der Gobâr-Ziffern bedient zu haben; dadurch haben sie vielleicht auch die ursprünglich schlankere Form verloren und eine mehr den jüdischen Schriftzügen angemessene, unter welcher sie in den Manuscripten häufig vorkommen, erhalten. — Auf die Wichtigkeit der Gobâr-Ziffern und auf ihre Bedeutung in der Entwickelung des dekadischen Zahlensystems hat zuerst **Alexander von Humboldt** in der berühmten Abhandlung: Ueber die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwerthes in den indischen Zahlen (**Crelle**'s Journal, Band 4) hingewiesen.

*) Hiermit soll nicht gesagt werden, dass die Christen nur auf diese Weise mit den Gobâr-Ziffern bekannt geworden sind.

Mit diesen Ergebnissen gehen wir nun zunächst zur Betrachtung der Stelle am Ende des ersten Buches der Geometrie des Boethius, die allein zu der Annahme, dass der Ursprung unsers gegenwärtigen Zahlensystems von den Pythagoreern herzuleiten sei, Veranlassung gegeben hat. Zwei Fälle sind möglich: entweder ist die in Rede stehende Stelle von Boethius verfasst, oder sie ist später hinzugesetzt. Wir nehmen vor der Hand den ersten Fall an.

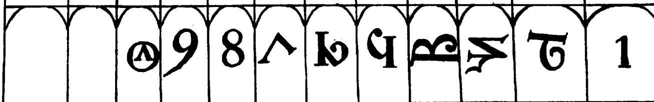
Die Geometrie des Boethius besteht aus 2 Büchern. Nachdem er in dem ersten einen dürren Auszug aus den 4 ersten Büchern der Elemente Euklid's gegeben und einiges zur Erläuterung hinzugefügt hat, fährt er so fort: Sed jam opus est ad Geometricalis mensae traditionem ab Archita, non sordido hujus disciplinae autore, latino accommodatam venire, si prius praemisero, quot sint genera angulorum et linearum, et pauca dixero de summitatibus et extremitatibus. Dies führt er aus und setzt alsdann hinzu: Nosse autem hujus artis despicientem, quid sint digiti, quid articuli, quid compositi, quid incompositi numeri, quid multiplicatores, quidve divisores, ad hujus formae speculationem, quam sumus tradituri, oportet. Digitos vero quoscunque infra primum limitem, id est omnes quos ab unitate usque ad denariam summam numeramus, veteres appellare consuerunt 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Articuli autem omnes decem in ordine positi et in infinitum progressi nuncupantur. Compositi quippe numeri sunt omnes a primo limite, id est, a decem usque ad secundum limitem, id est 20, ceterique sese in ordine sequentes exceptis limitibus; incompositi autem digiti omnes annumeratis et omnibus limitibus. Multiplicatores igitur numeri mutua in semet replicatione volvuntur, id est, interdum major minoris, interdum autem major majoris multiplicator existit. Interdum vero numerus in se excrescens multiplicationis augmenta suscipit. Divisores autem majorum semper minores constituuntur numeri.

Unter der Aufschrift: De ratione abaci, folgt nun die in Rede stehende Stelle. Sie lautet: Priscae igitur prudentiae viri Pythagoricum dogma secuti, Platonicaeque autoritatis investigatores, speculatoresque curiosi, totum Philosophiae culmen in numerorum vi constituerunt. Quis enim Musicarum modulamina symphoniarum numerorum expertia censendo pernoscat? Quid ipsius firmamenti syderea corpora stellis compacta naturae numerorum ignarus deprehendat, ortusque signorum et occasus colligat? etc. Pythagorici vero, ne in multiplicationibus et partitionibus et in podismis aliquando fallerentur, ut in omnibus erant ingeniosissimi et subtilissimi, descripserunt sibi quandam formulam, quam ob honorem sui praeceptoris mensam Pythagoream nominabant, quia hoc quod depinxerant, magistro praemonstrante cognoverant. A posterioribus appellabatur abacus, ut quod alta mente conceperant, melius, si quasi videndo ostenderent, in notitiam omnium transfundere possent, eamque subterius habita sat mira descriptione formabant. Hierauf folgt in der Mehrzahl der gedruckten Ausgaben*) der Schriften des Boethius die bekannte Einmaleinstabelle (die durch eine sonderbare Verwechselung, vielleicht auf Grund dieser Stelle des Boethius, ebenfalls abacus Pythagoricus benannt worden ist) wozu aber der nachfolgende Text durchaus nicht passt. Zwei gute Codices aus dem 11. Jahrhundert indessen, der eine in der Altdorfer, der andere in der Bibliothek der Stadt Chartres, bieten an dieser Stelle ein Tableau dar, das mehrere Reihen Zahlzeichen von der Rechten zur Linken geschrieben enthält. Mannert hat dasselbe zugleich mit einem Stück des nachfolgenden Textes nach dem Altdorfer Codex genau in Kupfer stechen lassen und seiner Abhandlung: De numerorum quos Arabicos vocant vera origine Pythagorica, Norimb. 1801, beigefügt. Ich lasse hier eine möglichst treue Copie von Mannert's Abbildung folgen, daneben der Vergleichung wegen die Zahlzeichen, die Chasles aus dem Codex der Bibliothek zu Chartres mitgetheilt hat (Geschichte der Geometrie u. s. w. S. 532 ff. deutsche Uebers.) zugleich mit denen aus einem Manuscript vom Anfang des 12. Jahrhunderts, das derselbe in den Comptes rendus de l'Academie des sciences 1843 bekannt gemacht hat, ausserdem die Zahlzeichen aus einem Manuscript um die Mitte des 13. Jahrhunderts, das im Besitz Leibnizens war und sich gegenwärtig auf der Königlichen Bibliothek zu Hannover befindet, und zuletzt die Gobâr-Ziffern nach Sylvestre de Sacy.

Es fällt sogleich in die Augen, dass in beiden Handschriften zwischen den Zahlzeichen des Tableaus und denen des nachfolgenden Textes

*) In der ersten Ausgabe der sämmtlichen Werke des Boethius (Venedig 1492) folgt ein leerer Platz.

Aus der Altdorfer Handschrift.



		Si pos	celentis	temenias	zenis	caltis	quimas	arbas	ormis	andras	igin
			9	8	Λ						1
c̄m̄ī	x̄m̄ī	īm̄ī	c̄īm̄	x̄īm̄	m̄ī	c̄	x̄	ī	c	x	1
l̄ d̄d̄	v̄ d̄d̄	d̄ d̄d̄	l d̄d̄	v̄ d̄d̄	d̄ d̄	l̄	v̄	d	l	v	is
x̄xv d̄	iis d̄	c̄cl d̄	xxv d̄	iis d̄	c̄cl c̄cl	x̄xv	īis	ccl	xxv	iis	iʒ
x̄xiis c̄cl	iʒ c̄cl	c̄xxv c̄cl	xiis c̄cl	iʒ c̄cl	c̄cl	xiis	iʒ	cxxv	xiis	iʒ	

Superius ú digeste descriptionis formula hoc
modo utebant̃ Habebant enim diverse
formatos apices uel caracteres. Quidā
enī huiuscemodi apicu notas sibi con
scripserant ut hec notula responde
ret unitati I. Ista aūt binario Ƭ
Tercia ú tribus . Quarta
uero quaternario
hec aūt quinq; asscriberet. Ꝗ. ista
aūt senario. Septima aūt septe
nario cueniret Λ. hec u octo 8
Ista aūt nouenario iungeret. 9

Aus der Handschrift von Chartres.

Die Zahlzeichen des Tableaus.

QUIMAS ARBAS ORMIS ANDRAS IGIN

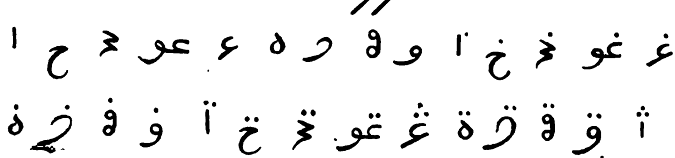
SIPOS CELENTIS TEMENIAS ZENIS CALTIS

Die Zahlzeichen des Textes.

Aus einer Handschrift gegen Anfang des 12. Jahrhunderts.

Aus einem Manuscript um die Mitte d. 13. Jahrhdts.

Gobar-Ziffern.



theilweise eine Verschiedenheit stattfindet; sie ist in der Mannert's unbedeutend, dagegen in der von Chasles eingesehenen Handschrift bei manchen Zahlzeichen sehr auffallend. Dagegen zeigen beide Handschriften eine ziemliche Uebereinstimmung hinsichtlich der in dem Text befindlichen Zahlzeichen, die vielleicht noch grösser sein würde, wenn anstatt der zweiten Nachbildung der Zahlzeichen Chasles' die Handschrift von Chartres selbst vorläge. Vor allem ist aber hervorzuheben, dass beide Tableaus ein zehntes Zahlzeichen darbieten, das in dem Text fehlt. Demnach darf wohl die Annahme gerechtfertigt erscheinen, dass die Zahlzeichen des Tableaus von einer andern Hand herrühren, als die des Textes; denn wenn die letztere Boethius schrieb, so würde doch offenbar derselbe nicht von diesen verschiedene in das Tableau gesetzt und keinenfalls unterlassen haben, etwas über das zehnte Zahlzeichen im Texte zu bemerken. — Vergleichen wir nun die Zahlzeichen des Textes, deren grössere Uebereinstimmung schon bemerkt ist, mit den Gobâr-Ziffern, so ergiebt sich bis auf einige unbedeutende Kleinigkeiten, die wohl auf Rechnung mangelhafter Copirung gesetzt werden könnten, eine auffallende Uebereinstimmung, besonders mit denen in dem von Mannert getreu mitgetheilten Text. Die Annahme, dass diese Zahlzeichen des Textes Gobâr-Ziffern sind, die in gewissen untergeschobenen pythagoreischen Fragmenten sich fanden, gewinnt an Wahrscheinlichkeit durch das, was im Texte weiter gesagt wird. Die Worte des Textes unmittelbar nach dem Tableau lauten nämlich so: Superius vero digestae descriptionis formula hoc modo utebantur. Habebant enim diverse formatos apices vel caracteres. Quidam enim hujuscemodi apicum notas sibi conscripserant, ut haec notula responderet I etc. Es folgen nun die Zahlzeichen des Textes; darauf heisst es weiter: Quidam vero in hujus formae descriptione literas alfabeti sibi assumebant hoc pacto, ut litera, quae esset prima, unitati, secunda binario, tertia ternario, ceteraeque in ordine naturali numero responderent naturali. Alii autem in hujusmodi opus apices naturali numero insignitos et inscriptos tantummodo sortiti sunt. Hos enim apices ita varie ceu pulverem dispergere in multiplicando et in dividendo consuerunt, ut si sub unitate naturalis numeri ordinem jam dictos caracteres adjungendo locarent, non alii quam digiti nascerentur. Betrachten wir diese Worte ganz unbefangen, so sagen sie weiter nichts, als dass die Pythagorerer sich verschiedener Zahlzeichen bedient hätten, und zwar die einen gewisser Charactere, welche apices genannt werden, andere hätten die Buchstaben als Zahlzeichen gebraucht; jene hätten die Gewohnheit gehabt, diese apices beim Multipliciren und Dividiren „ceu pulverem dispergere“: eine Redewendung, die an die bilderreiche orientalische Ausdrucksweise erinnert, und die, wie es scheint, aus der Uebersetzung von gobâr (Staub) entstanden ist. — Wir geben zunächst noch die folgenden Worte: Primum autem numerum, id est binarium (unitas enim, ut in Arithmeticis est dictum, numerus non est, sed fons et origo numerorum) 10*) inscripta ponentes 20, et ternarium 30, et quaternarium 40, ceterosque in ordine sese sequentes proprias secundum denominationes assignare constituerunt. Sub linea vero centeno insignita numero, eosdem apices ponentes binarium 200, ternarium 300, quaternarium 400, ceterosque certis denominationibus respondere decreverunt. In sequentibus vero paginularum lineis idem facientes nullo erroris nubilo obtenebrantur. Diese Worte sind nur zu verstehen und lassen sich am besten mit den vor dem Tableau vorausgehenden in Zusammenhang bringen, wenn an die Stelle des in den beiden Handschriften enthaltenen Zahlentableaus und anstatt der in den gedruckten Ausgaben befindlichen Einmaleinstabelle ein einfacher Abacus gesetzt wird, dessen man sich vor Einführung unsers gegenwärtigen Zahlensystems beim Rechnen bediente. Derselbe hatte diese Form:

$M\overline{I}$	$\overline{C}$	$\overline{X}$	M	C	X	I

Dadurch verliert zugleich die ganze Stelle die Dunkelheit, die man bisher darin gefunden hat. Insofern aber der Verfasser derselben sich des Abacus bediente, so muss die Annahme fallen, dass er ein Zahlensystem mit Position gekannt hat. —

*) So lautet an dieser Stelle der Text; offenbar sind die Worte „sub linea“ vor 10 ausgefallen.

Betrachten wir noch einmal die zuletzt mitgetheilten Worte, so stossen wir sogleich anfangs auf den eingeschobenen Satz: Unitas numerus non est, sed fons et origo numerorum. Was soll dies pythagoreische Philosophem, das nicht als eine in den Text gekommene Glosse angesehen werden darf, hier zur Stelle, wo von praktischem Rechnen die Rede ist? Soll etwa das Rechnen ohne die Eins geschehen? Nehmen wir dazu noch die schliesslich folgenden Regeln über Multiplication und Division, die so mangelhaft und undeutlich dargestellt sind, dass sie, wenigstens in der vorhandenen Gestalt, unmöglich von Boethius, der mit der Arithmetik so vertraut war, verfasst sein können, so kommen wir zu dem zweiten der oben aufgestellten Fälle, dass die ganze in Rede stehende Stelle am Ende des ersten Buches der Geometrie als nicht von Boethius herrührend zu betrachten ist. Schon das muss mit Recht befremden, dass in einer Schrift über Geometrie und zwar am Schlusse des ersten Buches ein Stück Arithmetik angehängt ist; alsdann aber dürfte sich wenigstens theilweise von dieser Stelle eben dasselbe nachweisen lassen, was Chasles in Bezug auf ein ähnliches arithmetisches Stück, das am Ende des zweiten Buches der Geometrie sich findet, gezeigt hat. Derselbe hat nämlich von dem letzteren bemerkt, dass es aus dem ersten Buche der Arithmetik des Boethius compilirt ist (Geschichte der Geometrie S. 525); auch in unserer Stelle finden sich Spuren, dass sie aus der Arithmetik des Boethius zusammengelesen ist: ausser dem zuletzt besprochenen Satz lassen sich die oben angeführten Worte: Quis enim Musicarum modulamina symphoniarum numerorum expertia censendo pernoscat? etc. in dem Capitel, in welchem Boethius von dem Nutzen der Arithmethik handelt, nachweisen. — Wir gehen noch einen Schritt weiter: wir behaupten, dass die ganze Schrift über die Geometrie, von der Boethius der Verfasser sein soll, nicht von ihm herrührt. Freilich können wir vor der Hand unsere Behauptung nur dadurch rechtfertigen, dass wir Boethius in den mathematischen Wissenschaften zu gut bewandert und überhaupt zu philosophisch gebildet voraussetzen, als dass er ein solches elendes Machwerk, wie diese Geometrie ist, zusammengetragen haben sollte. Boethius war im Mittelalter ein vielgelesener Schriftsteller; die Versuchung war daher lockend, ihm, dessen Arithmetik allgemein bekannt war, auch ein Werk über die Geometrie unterzuschieben. Wir setzen den Verfasser dieser

Geometrie in das Zeitalter Gerbert's und seiner Schüler, in welchem mitten in jenen finstersten Zeiten des Mittelalters auf kurze Zeit besonders die mathematischen Wissenschaften cultivirt wurden. Es existirt nämlich eine Abhandlung unter dem Titel: De numerorum divisione, deren Verfasser ungewiss ist (ob Beda oder Gerbert?) die nach Chasles (a. a. O. S. 529) eine grosse Aehnlichkeit in Hinsicht auf den Gegenstand und selbst bis auf die Worte mit der in Rede stehenden Stelle des Boethius zeigt, und die derselbe für eine Nachahmung und Entwickelung dieser letztern hält (S. 583). Wer aber, kann man mit Recht fragen, vermöchte wohl von einer so äusserst verworrenen Stelle, wie die unsere, eine Entwickelung zu geben? Wir schliessen umgekehrt: aus der Abhandlung: De numerorum divisione, ist die besprochene Stelle von einem, der sicherlich nicht viel von der Sache verstand, compilirt worden und vielleicht zugleich mit ihr die ganze Schrift über die Geometrie, die dem Boethius zugeschrieben wird.

Wir gehen jetzt zu der Prüfung der zweiten Ansicht über, nach welcher wir unser Zahlensystem den Arabern verdanken, die es wiederum von den Indern entlehnt haben.

Das den Arabern eigenthümliche Zahlensystem besteht aus 28 Zeichen, von denen die ersten neun die Zahlen von 1 bis 9, die darauf folgenden neun die Zehner, die alsdann folgenden die Hunderte, und das letzte Zeichen 1000 bedeuten. Sie bilden die zwischen diesen Gränzen liegenden zusammengesetzten Zahlen durch additive Nebeneinanderstellung, indem sie, nach semitischer Weise, von der grösseren Zahl zu der kleineren von der rechten zur linken Hand, wie in der Buchstabenschrift, fortschreiten. Demnach ist in dem den Arabern eigenthümlichen Zahlensystem keine Spur von Positionswerth der Ziffern zu finden.

Die Araber gebrauchen aber noch andere Zahlzeichen, die sie indische nennen. Nicht allein diese Benennung, sondern dass sie auch selbige von der Linken zur Rechten fortschreitend schreiben, deutet offenbar auf einen fremden Ursprung dieser Zahlzeichen. Sylvestre de Sacy (Grammaire Arabe Tom. I. cap. VIII.) giebt sie folgendermassen an:

١	٢	٣	۴	٥	٦	٧	٨	٩	٠
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Er setzt hinzu, dass 5 oft die Gestalt ɑ hat und dass an die Stelle des Punktes die 0 tritt. Diese Zahlzeichen werden nun so gebraucht, dass ihnen ein absoluter und zugleich ein von ihrer Stelle abhängiger Werth beigelegt wird, und es ist die Annahme entstanden, dass daraus unsere Zahlzeichen und unser Zahlensystem hervorgegangen sind.

Wir werden demnach hinsichtlich des Ursprungs unsers Zahlensystems auf Indien verwiesen, und es ist nöthig, die Leistungen der Inder in der Arithmetik in Betracht zu ziehen.

So wie man schon längst von dem hohen Alterthum der indischen Gelehrsamkeit überhaupt zurückgekommen ist, so dürften auch die Anfänge der wissenschaftlichen Behandlung der Arithmetik in Indien nicht über die ersten christlichen Jahrhunderte hinaus zu versetzen sein. Zwar berichtet Massoudi, der im 10. Jahrhundert nach Ch. schrieb, dass die Inder die Erfindung der 9 Zahlzeichen auf ihren ersten König Brahma zurückführen; dieser Angabe indess steht entgegen, dass in den Sanskritschriften Aryabhatta's, der in den ersten christlichen Jahrhunderten lebte, noch keine besonderen Zahlzeichen, sondern die Buchstaben des Alphabets als Zahlzeichen vorkommen. Es liegt wohl in der Natur der Sache, dass das indische Zahlensystem nicht auf einmal erfunden, sondern allmählig ausgebildet worden ist; dass es aber ursprünglich in Indien entstanden und nicht etwa fremde Einflüsse auf die Ausbildung desselben eingewirkt haben, zu dieser Behauptung ist man berechtigt, wenn man bedenkt, wie wenig zugänglich die Bewohner Indiens waren, wie fest sie an ihren Sitten und Gewohnheiten hingen, und wie sehr sie alles Fremde verabscheuten. Die Vorzüge, die das indische Zahlensystem vor allen andern voraus hat: leichte Anwendbarkeit, Einfachheit und Sicherheit in den Rechnungsoperationen, mussten demselben sehr bald allgemein Eingang verschaffen; es wurden dadurch nicht allein die Rechnungen, die im Verkehr des Lebens vorkommen, leicht erlernt und vervollkommnet, auch die Behandlung rein wissenschaftlicher Probleme wurde so gefördert, dass die indischen Mathematiker im Besitz von Auflösungsmethoden von Gleichungen waren, die man erst im 17. Jahrhundert im Abendlande von Neuem auffand und die bis auf die neueste Zeit ohne wesentliche Verbesserung Geltung behalten haben. So mächtig, ja überwältigend war der Einfluss, den in Indien das dekadische Zahlensystem auf die andern Gebiete der Wissenschaft äusserte, dass die Arithmetik überall vorherrschte und die Geometrie als ein Theil derselben erscheint*).

Es entsteht nun die Frage, auf welche Weise und um welche Zeit das dekadische Zahlensystem von den Indern zu andern Völkerschaften übergegangen ist. Wir folgen hierin den Berichten des Albyruny aus dem Anfange des 11. Jahrhunderts, die Reinaud in seinem ausgezeichneten Mémoire sur l'Inde, Paris 1849, zu Grunde gelegt hat. — Albyruny (sein vollständiger Name ist Abul-Ryhan Mohammed Albyruny) war einer der ausgezeichnetsten Männer seiner Zeit. Er verstand Griechisch und übersetzte aus dem Sanskrit; ausserdem war er in der Mathematik wohl bewandert und ein vorzüglicher Astronom. Als in dem ersten Jahrzehnt des 11. Jahrhunderts Mahmud der Gaznevide ein Heer rüstete, um in Indien einzufallen, lud er Albyruny und dessen Freund Avicenna ein, um bei dieser Gelegenheit in die Culturländer Indiens, den Landstrich zwischen Ganges und Dschumna, einzudringen und sich mit der Weisheit der Inder bekannt zu machen. Albyruny folgte allein dem Rufe und verweilte längere Zeit in Indien. Er hat einen sehr interessanten Bericht über diesen Aufenthalt hinterlassen, der ein vollständiges Bild über den Zustand der Halbinsel in wissenschaftlicher Hinsicht giebt. In demselben spricht er folgendermassen über die Ziffern und das Zahlensystem der Inder (nach der Uebersetzung Reinaud's a. a. O. S. 298 ff.): Les Indiens, à la différence de nous, ne se servent pas des lettres de leur alphabet pour indiquer des nombres. Mais, de même que l'alphabet varie suivant les provinces, les chiffres changent aussi; les indigènes les nomment anka. Les chiffres dont nous faisons usage sont empruntés à ce que l'on a trouvé de plus convenable chez eux. Du reste, les formes sont indifférentes, pourvu qu'on s'entende de part et d'autre. Dans le Cachemire, on ne se sert pas de traits particuliers pour exprimer les nombres; on a adopté les signes employés par les Chinois. Mais un point sur lequel tous les Indiens sont d'accord, c'est de procéder d'après

---

*) Eine vorzügliche, sehr ausführliche Darstellung der Leistungen der Inder in den mathematischen Disciplinen findet sich in der Schrift: A. Arneth, die Geschichte der reinen Mathematik, in ihrer Beziehung zur Geschichte der Entwickelung des menschlichen Geistes. Stuttgart 1852.

le système décimal, de manière qu'en posant plusieurs chiffres à côté les uns des autres, un chiffre équivant toujours au dixième de celui qui suit, et au décuple de celui qui précède. — Aus diesen für unsern Zweck höchst wichtigen Worten folgt 1) dass zu Anfang des 11. Jahrhunderts die Araber bereits das dekadische Zahlensystem angenommen hatten, und zwar scheint es, als wenn dies schon längere Zeit vorher stattgefunden; ferner 2) dass die Araber die indischen Zahlzeichen, wenigstens nicht sämmtliche, nicht in der Form bei sich einführten, die sie bei den Indern hatten; sie entlehnten vielmehr nur das, was ihnen zweckmässig (convenable) schien. Da sie fanden, dass die Gestalt der Ziffern in Indien selbst von Landstrich zu Landstrich eine andere war, so entnahmen sie vorzugsweise nur das System, das trotz der Verschiedenheit der Zahlzeichen durch ganz Indien gebräuchlich war. Namentlich entlehnten die Araber nicht das Zeichen für die Null von den Indern, und zwar deshalb, weil in ihrem eigenen Zahlensystem die Ziffer für 5 grosse Aehnlichkeit damit hatte und leicht verwechselt werden konnte. Sie setzten dafür einen Punkt, übersetzten aber das Sanskritwort (soûnya) womit die Inder die Null bezeichneten, und gaben dem Punkt die Benennung sifr d. h. leer, woraus das Wort Ziffer entstanden ist. Hiermit stimmt auch Ruschen Ali, der persische Commentator der Schrift: Essenz der Rechenkunst von Mohammed Behâ-eddin ben Alhosain Al-âmulî (arabisch und deutsch herausgegeben von Nesselmann, Berlin 1843) der sich nach Nesselmann's Uebersetzung (S. 61) so ausdrückt: Wisse, dass, wenn an irgend einer von den Stellen keine Zahl sich findet, man dann, um die Stelle anzudeuten, die Gestalt des Final-Ha, nämlich ه, welches das Zeichen Sifr im Sinne von etwas Leerem ist, schreibt..... Wisse, dass der Unterschied zwischen dem Zeichen der Fünf und der Gestalt der Null der ist, dass man die Fünf in Gestalt eines kleinen Ain (ع) schreibt, welches das Ende seines Gürtels bis nach oben hin gehen lässt, in dieser Art ٥, dass man aber für Null das Final-Ha schreibt. Gegenwärtig ist es Sitte, das Final-Ha für die Fünf zu gebrauchen und die Null durch einen Punkt auszudrücken. — Die Araber setzten also für das Zeichen der Null den Punkt; entsteht da nicht unwillkührlich die Vermuthung, dass in dem bisher von ihnen gebrauchten Zahlensystem der Punkt bereits eine Bedeutung hatte, ähnlich wie in dem Gobâr-System?

Oder bedienten sich die Araber des Gobâr-Systems, bevor sie das indische System annahmen? Die Beantwortung dieser Frage erscheint sehr schwierig; sie ist nur dann möglich, wenn ein gründlicher Kenner des Arabischen einmal die allmähligen Umwandlungen, welche die Araber mit ihren Schrift- und Zahlzeichen vorgenommen haben, genau verfolgt. Dennoch dürfte sich die Art und Weise, wie das indische System auf die Araber übergegangen ist, schwer mit Bestimmtheit ermitteln lassen; gewiss ist dieser Uebergang nicht auf ein Mal geschehen. Es scheint, dass das dekadische System bei den Arabern zuerst im Verkehr des Lebens, im Handel üblich geworden ist; dies stimmt nicht allein mit dem Wesen der indischen Arithmetik — in Indien ist die Arithmetik nie eine selbstständige Wissenschaft gewesen, sie war nur für praktische Zwecke vorhanden (Arneth a. a. O. S. 141) — sondern es deutet auch dahin die Erzählung, dass Avicenna in der zweiten Hälfte des 10. Jahrhunderts von seinem Vater zu einem Oelhändler geschickt wurde, um von diesem in der indischen Rechenkunst unterrichtet zu werden*), so wie auch dass in der ersten arabischen Schrift über die Algebra, die auf Befehl des Chalifen Almamum von Mohammed ben Musa in der ersten Hälfte des 9. Jahrhunderts nach indischen Vorbildern verfasst würde, in dem Text nur Zahlwörter und bloss an einigen Figuren Ziffern vorkommen**). Aus dem Letzteren darf offenbar geschlossen werden, dass um die Zeit der Abfassung dieser Schrift die indischen Zahlzeichen noch nicht unter den Arabern allgemein gebräuchlich waren, und dass deshalb Mohammed ben Musa es vorzog, die Zahlen durch Worte auszudrücken.

---

*) Es ist bemerkenswerth, dass auch Leonardus Fibonacci, der erste christliche Schriftsteller über Algebra, gegen Ende des 12. Jahrhunderts auf eine ähnliche Weise das dekadische Zahlensystem kennen lernte; er wurde, wie er selbst erzählt, auf Veranlassung seines Vaters, der die Rechte der pisanischen Kaufleute an der Douane von Bugia in Afrika wahrnahm, daselbst im Rechnen unterrichtet.

**) Numerals are in the text of the work always expressed by words: figures are only used in some of the diagrams, and in a few marginal notes. Rosen in der Vorrede zu: The Algebra of Mohammed ben Musa. London 1831.

Wenn aber die Einführung des dekadischen Zahlensystems unter den Arabern allmählig vor sich ging, wie es auch in der Natur der Sache liegt, so wird sich keine bestimmte Zeit dafür ermitteln lassen, sondern es werden nur Gränzen angegeben werden können, zwischen welchen die Einführung stattgefunden. Die eine Gränze, die obere, ist durch den Bericht Albyruny's festgestellt, der zu Anfang des 11. Jahrhunderts schrieb; um diese Zeit war das dekadische Zahlensystem bei den Arabern im Gebrauch. Welches ist aber die untere? Nach dem Chronikon des Theophanes (Paris 1655, S. 314) und nach dem Bericht des Abul-Pharajii (Hist. compend. dynast. S. 230) verbot der Chalif Walid, der um 700 nach Ch. herrschte, den Arabern, beim Schreiben der griechischen Schriftzüge sich zu bedienen; er nahm aber von diesem Verbot ausdrücklich die griechischen Zahlzeichen aus, die vor den damaligen arabischen den Vorzug verdienten. Demnach gebrauchten um das Jahr 700 die Araber noch nicht die indischen Ziffern. Sicherlich aber kannten die Araber im 9. Jahrhundert das indische System, denn um die Mitte des 9. Jahrhunderts verfassten der berühmte Alkendi und ein anderer Schriftsteller, Sind, Sohn des Ali, Schriften über die indische Rechnung (Vergl. Libri hist. des scienc. mathémat. en Italie, Tom. I. p. 379 und Reinaud a. a. O. S. 302). Die allmählige Verbreitung des dekadischen Zahlensystems unter den Arabern wird also vom 9. bis zum 11. Jahrhundert zu setzen sein. Dass dieselbe sehr langsam vor sich ging, dafür spricht die oben angeführte Erzählung aus dem Leben Avicenna's, sowie auch, dass die Araber bereits an das Rechnen mit griechischen Zahlzeichen sich gewöhnt hatten.

Hieran knüpft sich nun die Frage, um welche Zeit das dekadische Zahlensystem zuerst in Europa unter den Christen Eingang fand. Die bekannte Erzählung, dass Gerbert, der am Ende des 10. Jahrh. als Sylvester II. den päpstlichen Thron bestieg, vor dem Jahre 970 Cordova besucht und daselbst von den Arabern unterrichtet nach seiner Rückkehr das dekadische Zahlensystem zuerst unter den Christen verbreitet hätte, ist von Chasles (Geschichte der Geometrie S. 585) und zwar mit Recht bekämpft worden. Auch Büdinger (Ueber Gerbert's wissenschaftliche und politische Stellung, Cassel 1851) stimmt nach sorgfältiger Prüfung der Verhältnisse ihm darin bei und erweist bis zur Evidenz, dass Gerbert nur in der spanischen Mark, in der damals reges, geistiges Leben herrschte, gewesen sein könne, meint aber, dass derselbe unser gegenwärtiges Zahlensystem daselbst kennen gelernt und seine Schüler darin unterrichtet habe. Zwar wird eine endgültige Entscheidung über diesen Punkt nur dann erst gefällt werden können, wenn Gerbert's mathematische Schriften, die noch unedirt in der Bibliothek des Vatican liegen, einmal an die Oeffentlichkeit treten, wodurch zugleich sich ergeben wird, von welchem Umfange Gerbert's Wissenschaft in den mathematischen Disciplinen überhaupt war, und welche Kenntnisse er insbesondere in der Arithmetik besass; indess dürfte schon aus dem bisher Bekannten sich ermitteln lassen, wie ohngefähr jene Entscheidung ausfallen möchte. Namentlich gehört hierher das, was Richer, Gerbert's Schüler, über dessen Bildungsgang und spätere Unterrichtsweise mittheilt; ausserdem verdienen einige Notizen Berücksichtigung, die zerstreut in Gerbert's Briefen sich finden. Richer (Hist. lib. III. c. 43) erzählt, dass Gerbert von dem Grafen Borell von Barcelona dem Bischof Hatto übergeben worden sei, um von demselben weiter ausgebildet zu werden; er setzt hinzu: Apud quem (Hattonem) etiam in mathesi plurimum et efficaciter studuit. Während also Gerbert bei dem Bischof sich aufhielt, machte er seine mathematischen Studien. Unter wessen specieller Leitung dies geschah, wird nicht erwähnt; indess gedenkt Gerbert in seinen spätern Briefen eines gewissen Joseph, den er einmal den Spanier, ein anderes Mal den Weisen nennt, und dessen Schrift über Multiplication und Division er von den Mönchen des Klosters Aurillac zu haben wünscht. Die Vermuthung liegt nahe, dass Gerbert denselben in der spanischen Mark kennen gelernt und von ihm unterrichtet worden sei. Man weiss nichts Näheres über diesen Mann; doch scheint der Name Joseph auf einen Juden hinzudeuten, und der Umgang eines Mönchs mit einem Juden darf insofern nicht befremden, als in den spanischen Landen die Juden eine weit höhere Stellung, als anderswo, im bürgerlichen Leben einnahmen. Aber auch angenommen, Joseph sei ein Araber gewesen, so darf noch nicht mit Zuversicht behauptet werden, dass um die Mitte des 10. Jahrhunderts bereits das indische Zahlensystem unter den spanischen Arabern im Gebrauch war; denn es ist oben erwähnt worden, dass die Verbreitung desselben sehr langsam vor sich ging. Dazu kommt, dass zur Zeit Gerbert's die Blüthezeit der arabischen Wissenschaft in Spanien noch nicht begonnen hatte. „Die Männer, welche das arabische Spanien so berühmt gemacht und ihm einen so grossen Einfluss auf die Bildung des übrigen Europa verschafft haben, blühten nach der Zeit, in welche Gerbert's Jugend fällt. Ibn Sina (Avicenna) lebte im Anfange des elften, Geber von Sevilla um die Mitte dieses, Abu-Roschd (Averroës) zu Ende des zwölften Jahrhunderts. Die Wissenschaft der spanischen Araber war im zehnten Jahrhundert noch wesentlich nationaler oder religiöser Art" (Büdinger a. a. O. S. 10). — Die in Rede stehende Frage, ob Gerbert während seines Aufenthalts in der spanischen Mark das dekadische Zahlensystem kennen gelernt, dürfte aber besonders durch die Nachricht ihre Erledigung finden, die Richer über Gerbert's spätere Unterrichtsweise in der Mathematik mittheilt; er sagt (Hist. lib. III. 54): In Geometria non minor in docendo labor expensus est. Cujus introductioni, abacum id est tabulam dimensionibus aptam opere scutarii effecit. Cujus longitudini, in 27 partibus diductae, novem numero notas omnem numerum significantes disposuit. Ad quarum etiam similitudinem, mille corneos effecit characteres, qui per 27 abaci partes mutuati, cujusque numeri multiplicationem sive divisionem designarent; tanto compendio numerorum multitudinem dividentes vel multiplicantes, ut prae nimia numerositate potius intelligi quam verbis valerent ostendi. Quorum scientiam qui ad plenum scire desiderat, legat ejus librum quem scribit ad C. (Constantinum) grammaticum; ibi enim haec satis habundanterque tractata inveniet. Gerbert bediente sich also einer Rechentafel, die er wegen des häufigen Gebrauchs oder auch zum Behuf des Unterrichts aus Leder verfertigen liess, und die in 27 Columnen getheilt war. Er hatte ferner 1000 hörnerne Würfel, auf welchen 9 Zahlzeichen geschnitzt waren, wodurch er die Multiplication und Division einer jeden Zahl auszuführen vermochte. Demnach gebrauchte Gerbert beim Multipliciren und Dividiren ein Hülfsmittel, was er auch deshalb nicht entbehren konnte, da er mit 9 Zeichen rechnete; es fehlte ihm das Zeichen, das in dem indisch-arabischen Zahlensystem eine fehlende Zahl ausdrückt, und dessen Stelle der Abacus vertrat. Es wird also Gerbert die Kenntniss des dekadischen Zahlensystems abzusprechen sein. — Man kann nun noch die Frage aufwerfen, von welcher Art die Charaktere waren, mit welchen

Gerbert rechnete. Er hatte sie in Horn schneiden lassen; that er dies lediglich der ledernen Rechentafel wegen, oder wegen der, seinen Schülern nicht geläufigen Form der Zahlzeichen? Betrachtet man die Charaktere am Ende des ersten Buches der Geometrie des Boethius, so dürfte man sich leicht für das letztere entscheiden.

Das lebhafte Interesse, das Gerbert's Eifer für das Studium der mathematischen Wissenschaften angeregt hatte, erlosch mit seinen Schülern, und es folgte ein Jahrhundert tiefer Unwissenheit. Erst im 12. und 13. Jahrhundert begann eine nachhaltigere Einwirkung der hohen Cultur der Araber auf die christlichen Länder Europa's, von Westen her auf Frankreich, im Süden auf Italien. Es liegt nun in der Natur der Sache, dass während dieses Zeitraums einzelne, die mit Arabern längere Zeit in Berührung gewesen waren und den Gebrauch des dekadischen Zahlensystems von ihnen erlernt hatten, auch in der Heimath bei Rechnungen im Verkehr sich desselben bedienten, und es darf demnach nicht befremden, dass in den Manuscripten aus jener Zeit die indisch-arabischen Ziffern neben den römischen vorkommen; die allgemeinere Einführung des dekadischen Zahlensystems lässt sich indess seit der Zeit nachweisen, in welcher Leonardus Fibonacci seine Schriften verfasste. Derselbe beginnt sein unter dem Titel: Abbacus, im Jahre 1202 geschriebenes Werk folgendermassen: Cum genitor meus a Patria publicus scriba in Duana Bugea pro pisanis mercatoribus ad eum confluentibus constitutus praeesset, me in pueritia mea ad se venire faciens, inspecta utilitate et commoditate futura, ibi me studio abbaci per aliquot dies ita esse voluit et doceri. Ubi ex mirabili magisterio in arte per novem figuras Yndorum constitutus, scientia artis in tantum mihi prae caeteris placuit et intellexi ad illam, quod quidquid studebatur ex ea apud Aegyptum, Syriam, Graeciam, Siciliam et Provintiam cum suis variis modis ad que loca negatiationis causa prius peragravi, per multum studium et disputationis didici conflictum. Sed hoc totum etiam et Algorismum atque Pythagorae, quasi errorem computavi, respectu modi Yndorum. Quare amplectens strictius ipsum modum Yndorum et attentius studens in eo, ex proprio sensu quaedam addens et quaedam etiam ex subtilitatibus Euclidis geometriae artis apponens, summam hujus libri, quam intelligibilius potui in quindecim capitulis distinctam componere laboravi, fere omnia quae inserui certa probatione ostendens ut ex causa perfecta prae caeteris modo hanc scientiam appetentes instruantur, et gens latina de caetero sicut hactenus absque illa minime inveniatur etc. — Libri (Hist. des scienc. mathemat. en Italie, Tom. II. p. 20 sqq.) hat über die tiefe Einsicht Fibonacci's und über sein hohes Verdienst um die Wissenschaft ausführlich gehandelt.*) Er erwähnt zugleich, dass derselbe als der Stifter einer toskanischen Schule zu betrachten ist, in welcher das von ihm begonnene Werk, wenn auch nicht weiter gefördert, doch unterhalten und gepflegt wurde.

Das Rechnen mit Hülfe des dekadischen Zahlensystems wurde Algorismus, Alkhorismus oder Algorithmus**) genannt, während man für das aus dem Alterthum überkommene Verfahren den Namen Abacus beibehielt; da jedoch in den ersten Zeiten der Einführung des indisch-arabischen Zahlensystems die ältere Methode nebst ihren Zahlzeichen in Anspruch genommen werden musste, um das Rechnen nach dem neu eingeführten System zu erlernen***), so vermischten sich beide Weisen, und

*) Vergl. meine Abhandlungen: Fibonacci, der erste christliche Verfasser einer Abhandlung über die Algebra, und: Die Algebra in Italien seit Fibonacci, in Grunert's Archiv für Mathematik und Physik, Theil 2 und 3.

**) Ueber die Entstehung und Bedeutung dieses Wortes hat Reinaud eine Hypothese aufgestellt, die Beachtung verdient. Er sagt, dass sowohl der schon oben genannte Albyruny, als Mohammed ben Musa, der erste arabische Schriftsteller über Algebra, den Beinamen Al-Kharizmy führen. Die Schriften derselben, in denen das indisch-arabische Zahlensystem zu Grunde lag, wurden frühzeitig ins Lateinische übersetzt, und man benannte das neue System nach dem Beinamen des Mannes, in dessen Schriften es gefunden wurde. Siehe Reinaud Mémoire sur l'Inde pag. 303 sqq.

***) Dass dies Verfahren wirklich im Gebrauch gewesen und sich lange erhalten hat, davon giebt unter andern das Rechenbuch von Jacob Köbel, Stadtschreiber zu Oppenheim, Kunde, welches im Jahre 1518 in der dritten Auflage erschien (Das new Rechenpüchlein wie mann uff den Linien unnd Spacien, mit Rechenpfenningen, Kauffmanschafft und Tegliche handelungen, leichtlich rechen lernen mage, zum Dritten male gebessert und zu Oppenheym getrückt 1518). Die Vorrede desselben beginnt also: Dis Rechenbüchlein hab ich dem gemeinen Leyen zu gut unnd nutz (Dem die Zeyfertzal im anfang zu lernen schwere) Durch die gemein Teütsch zale zu Trücken, fürgenommen, und wil zu dem Ersten, dieselb Teütsch zale, die uff etlich Buchstaben auß dem A b c verordnet ist, anzeigen: Auch wie mann die deshalb wurden auch beide Namen für das alte und neue Verfahren ohne Unterschied gebraucht. Dergleichen Anweisungen im Rechnen, Abaci oder Algorismi genannt, finden sich noch in nicht unbedeutender Anzahl im Staube der grösseren Bibliotheken vergraben.

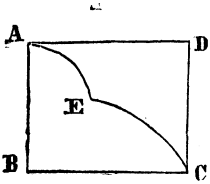
Schreiben, Lesen und Versten solle ercleren. Dornoch inn der Zweiten Lere, wil ich dich die Zeyfferßale underweisen u. s. w. In dieser anderen Lehre heisst es: Die Ander Ler zeigt an wie du die Zeifferzal Schreiben, lesen, ußsprechen und versten solt. Wie mann die zale, die mit sunderlichen figuren (und der gemein mann Zeiffern nendt) Lernen Schreiben Lesen und versteen solle, wirstu hier noch clerlich underweist, mit einer nochvolgenden Tafeln, inn welcher Tafel die zale der obgemelten Buchstaben und auch die zale der Zeiffern wie sich dieselben zusamen vergleichen, und was die beteuten, verstentlich angezeigt werden.

Beilage II.*)

25. October 1675.

Analysis Tetragonistica ex Centrobarycis.

Sit curva quaelibet AEC referenda ad angulum rectum BAD, sit $AB \sqcap DC \sqcap a$ et ultima $x \sqcap b$, et $BC \sqcap AD \sqcap y$ et ultima $y \sqcap c$. Patet omn. $\overline{yx \text{ ad } x} \overset{(1)}{\sqcap} \frac{b^2 c}{2}$ — omn. $\overline{\frac{x^2}{2} \text{ ad } y}$. Nam momentum spatii $ABCEA$ ex AD fit ex rectangulis ex $BC \sqcap y$ in $AB \sqcap a$; at vero momentum spatii $ADCEA$ ex AD seu complementi prioris fit ex summa quadratorum DC sive $\frac{x^2}{2}$ dimidiata, quod momentum, si auferatur a momento totius rectanguli $ABCD$ ex AD, id est ac in omn. x sive a $\frac{cb^2}{2}$, restabit momentum spatii $ABCEA$; unde habetur aequatio quam dixi, qua reformata sequitur omn. $\overline{yx \text{ ad } x}$ + omn. $\overline{\frac{x^2}{2} \text{ ad } y} \overset{(2)}{\sqcap} \frac{b^2 c}{2}$, adeoque harum duarum figurarum in unum junctarum semper haberi quadraturam. Qui est centrobarycae apex.



Sit aequatio curvae naturam experimens:

$ay^2 + bx^2 + cxy + dx + ey + f \overset{(3)}{\sqcap} 0$; ponatur $yx \overset{(4)}{\sqcap} z$, fiet $y \overset{(5)}{\sqcap} \frac{z}{x}$, quo

*) Diese und die folgenden Beilagen sind so abgedruckt, dass sie ein möglichst genaues Bild der Originale geben.

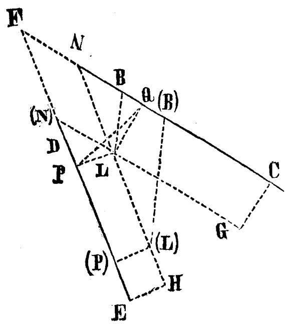
valore in aequatione (3) inserto fiet: $a\frac{z^2}{x^2} + bx^2 + cx\frac{z}{x} + dx + \frac{ez}{x} + f \overset{(6)}{\sqcap} 0$, sive sublatis fractionibus fit $az^2 + bx^4 + cx^2z + dx^3 + ezx + fx^2 \overset{(7)}{\sqcap} 0$. Sit rursus $x^2 \overset{(8)}{\sqcap} 2w$ eumque valorem inserendo in aeq. 3. fiet $ay^2 + 2bw + cxy + dx + ey + f \overset{(9)}{\sqcap} 0$, adeoque erit $x \overset{(10)}{\sqcap} \frac{-ay^2 - 2bw - ey - f}{cy + d} \overset{(11)}{\sqcap} \sqrt{2w}$ et quadrando utrobique fiet

$$a^2y^4 + 4aby^2w + 2aey^3 + 2afy^2 + 4b^2w^2 + 4bewy + 4bfw + e^2y^2 + 2fy + f^2 - 2c^2y^2w - 4cdyw - 2d^2w \overset{(12)}{\sqcap} 0.$$

Quodsi jam curva describatur secundum aequationem 7. itemque alia secundum aequationem 12, ajo quadraturam figurae unius pendere ex quadratura figurae alterius, et contra. Quod si jam loco aequationis 3. aliam sumamus altiorem seu tertii gradus, rursus duas alias habebimus loco 7. et 12, et ita continuando dubium non est, quin certam quandam progressionem ipsarum 7 et ipsarum 12 habituri simus, ut sine calculo continuari possit in infinitum non difficili opera. Ex data autem una alicujus curvae aequatione omnes aliae generali expressione exhiberi possunt, ex quibus compendiosissima eligi potest.

Datis figurae cujusdam momentis ex duabus quibusdam rectis dataque figurae ejusdem area, habetur ejus centrum gravitatis. Dato autem figurae cujusdam (aut etiam lineae) centro gravitatis et magnitudine, habetur ejus momentum ex aliis quibuscunque rectis. Itaque data figurae cujusdam magnitudine et momento ex duabus quibusdam rectis, datur ejus momentum ex qualibet recta data. Hinc etiam multae quadraturae ex quibusdam datis. Momentum autem cujusdam figurae ex recta qualibet etiam generali calculo exprimi potest.

Momentum divisum per magnitudinem dat distantiam centri gravitatis ab axe librationis. Sint in eodem plano rectae positione datae, sive parallelae sint sive productae concurrant in F. Momentum ex BC inventum sit ba^2, momentum ex DE inventum sit ca^2. Area figurae sit v, erit distantia centri gravitatis a recta BC, nempe $CG \sqcap \frac{ba^2}{v}$, et distantia ejus a recta DE, nempe $EH \sqcap \frac{ca^2}{v}$, ergo CG ad EH est ut b ad c, sive rationem habent datam. Ponatur jam rectam EH in eodem plano manen-



tem percurrere normaliter ipsam DE, et rectam CG percurrere normaliter ipsam BC, et apicem G rectam $G(N)$, apicem vero H rectam HN, vestigium scilicet suum relinquere. Necesse est si BC et DE alicubi concurrunt, etiam $G(N)$ et HN alicubi concurrere, sive intra sive extra F. Concurrant in L, erit angulus HLG aequalis angulo EFC, et angulus PLQ (ponendo $PL \sqcap EH$ et $LQ \sqcap CG$) erit supplementum ipsius anguli EFC ad duos rectos, adeoque erit datus. Juncta PQ habebitur Triangulum PQL, cujus dabitur angulus verticis L ad rationem laterum ad verticem QL ad LP. Cum ergo sumta BL vel $(B)(L)$ quantacunque, angulus BLP semper maneat idem, ac praeterea sit ut BL ad LP ita $(B)(L)$ ad $(L)(P)$, erit etiam ut BL ad $(B)(L)$ ita LP ad $(L)(P)$, quod contingere patet, si etiam FL ipsis proportionalis, seu recta transit per $FL(L)$ etc. Unde cum non dentur plura hic loca, sequitur locum esse rectam. Datis ergo duobus momentis figurae ex duabus rectis non parallelis, dabitur figurae momentis ex tribus axibus librationis, qui non sint omnes paralleli inter se, dabitur figurae area et centrum gravitatis. Ecce apicem Centrobarycae. Si dentur duo ejusdem figurae momenta ex duabus rectis inter se parallelis, dabitur figurae area, sed non centrum gravitatis.

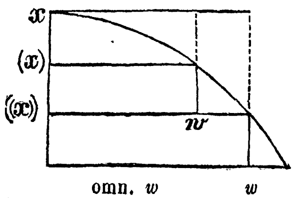
Cum sit finis Centrobarycae ex datis momentis invenire dimensiones, hinc habemus duo theoremata generalia: si dentur ejusdem figurae momenta duo ex duabus rectis sive axibus librationis parallelis inter se, dabitur ejus magnitudo; item si ex tribus non parallelis. Hinc jam videtur methodus patere ad inveniendas curvas Ellipticam et Hyperbolicam ex datis Circuli et Hyperbolae quadraturis. De quo Schediasmate peculiari.

26. October 1675.

Alia Analysis Tetragonistica haberi potest ope curvarum. Scilicet eadem curva in diversa resolvetur Elementa, prout ad diversas rectas ordinatae referuntur. Unde diversae quoque oriuntur figurae planae, curvae propositae Elementis homogeneae, cumque ex data curvae dimensione inveniantur omnes, sequitur ex data unius figurarum hujusmodi dimensione etiam ceteras haberi.

Aliis modis inveniri possunt figurae quae ex alia pendent, si ordinatae figurarum quarum quadratura habetur aut quarum quadratura ex data habetur, adduntur datae. Quemadmodum tractabiliora sunt spatia quam curvae, quoniam pluribus modis secari ac resolvi possunt, ita tractabiliora sunt solida planis et generatim superficiebus. Itaque ubi methodum qua superficies examinamus, ad solida transferemus, multa nova detegemus, et facile saepe demonstrabimus de superficiebus per solida, quae in ipsis superficiebus difficulter habentur. Eleganter observavit Tschirnhausius pleraque ab Archimede demonstrata, ut quadraturam parabolae, et quae ab his pendent circa sphaeram, conum, cylindrum, ex sola solidorum rectilineorum sectione ac compositione manifesta ac palpabilia reddi posse. Modi varii describendi nova solida: Si ex puncto in sublimi posito recta rigida descendens circa planum ducatur, cujuscunque illud sit figurae, coniformium genera producentur. Nam si planum circuli circumferentia terminatum sit, orietur conus rectus vel scalenus. Ita si figura, quae pro basi est, seu planum, aliquod centrum habeat, ut Ellipsis, orietur coniforme Ellipticum rectum, si punctum datum centro immineat, sin minus, scalenum. Aliud conoeides, aliud coniforme Ellipticum. Si linea rigida ex puncto descendens sit circularis aliave curva, tunc aut puncto vel polo illi ita affixa est, ut non nisi unius in eo motus libertatem habeat, scilicet circa quendam axem, et tunc necesse est, ut basis seu planum sit circulus, et ut centro ejus immineat punctum vel polus. Sin aliter, necesse est ut linea rigida aliorum habeat motuum libertatem, nempe seorsum et deorsum, aliterve, secundum quandam rectam, et tunc semper ubi opus erit, ascendet descendetve, ut semper planum datum sua circumrotatione circa axem attingat. Et hoc est secundum coniformium genus. Tertium genus est eorum, ubi praeter motum illum duplicem gyrationis cum axe, et exaltationis et descensionis, curva sola vel axis solus vel etiam figura cum axe rursus alios interim motus exercent, vel ipsum etiam punctum interim movetur.

Aliud: Differentiarum momenta ex perpendiculari ad axem aequantur complemento summae terminorum, sive Momenta Terminorum aequantur complemento summae summarum, sive omn. $\overline{xw}$ $\sqcap$ ult. x, $\overline{\text{omn. } w}$,, — omn.



$\overline{\text{omn. } w}$. Sit $xw \sqcap az$, fiet $w \sqcap \frac{az}{x}$, fiet omn. $\overline{az} \sqcap$ ult. x omn. $\frac{az}{x}$ — omn. $\overline{\text{omn. } \frac{az}{x}}$; ergo omn. $\frac{az}{x} \sqcap$ ult. x, omn. $\frac{az}{x^2}$ — omn. omn. $\frac{az}{x^2}$, quo valore in aequ. praecedenti inserto fiet: omn. $az \sqcap$ ult. x^2 omn. $\frac{az}{x^2}$ — ult. x, omn. $\overline{\text{omn. } \frac{az}{x^2}}$ — omn. ult. x. omn. $\frac{az}{x^2}$ — omn. omn. $\frac{az}{x^2}$. Et ita iri potest in infinitum.

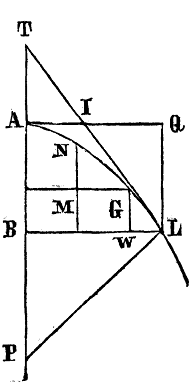
Omn. $\frac{a}{x} \sqcap x$ omn. $\frac{a}{x^2}$ — $\overline{\text{omn. omn.}}\, \frac{a}{x^2}$, et omn. $a \sqcap$ ult. x omn. $\frac{a}{x}$ — $\overline{\text{omn. omn.}}\, \frac{a}{x}$, quod postremum theorema exhibet summam logarithmorum ex data Hyperbolae quadratura.

Numeros abscissas repraesentantes soleo appellare ordinatas, quia ordinem terminorum sive ordinatarum exhibent. Si quadrato ordinatae figurae quadrabilis addas quadratum rectae constantis, radices summae duorum quadratorum repraesentabunt curvam quadratricis. Quod si radices summae duorum quadratorum dent figuram quadrabilem, etiam curva erit rectificabilis. Datae progressionis curvam describere: a Termino progressionis quadrato auferatur quadratum quantitatis constantis; radicum ex duobus quadratis figura quadratrix descripta curvam habebit quaesitam. Curva rectificabilis non ideo est descriptibilis. Descriptae curvae elementa pluribus diversis modis enuntiari possunt. Comparentur diversi modi enuntiandi elementa curvae cum diversis modis enuntiandi figuram ei homogeneam, prout ad diversa refertur. Imo et solidum curvae homogeneum adhuc pluribus modis enuntiari potest; et superficies homogenea curvae vel figurae.

29. October. 1675.

Analyseos Tetragonisticae pars secunda.

Credo nos tandem dare posse methodum, qua cujuslibet figurae Analyticae figura analytica quadratrix inveniri potest, quando id possibile, aut quando id fieri non potest, poterit tamen semper figura describi analytica, fungens vice quadratricis quam proxime. Hoc ita concipio: Proposita sit aequatio figurae cujus quaeritur quadratrix, cujus incognitae x et v. Sumatur aequatio ad curvam indeterminatam: $v \overset{(1)}{\sqcap} b + cx + dy + ex^2 + fy^2 + gyx + hy^3 + lx^3 + mxyy + yxx$ etc. Ordinetur ad tangentes hoc modo: $- dy - 2fy^2 - gyx - 3hy^3 - 2mxy^2 - mx^2y$ etc. $\overset{(2)}{\sqcap} ct + 2ext + gyt + 3lx^2t + my^2t + 2yxt$ etc. Jam $\frac{t}{y} \overset{(3)}{\sqcap} \frac{a}{v}$; ergo ex aequatione $\frac{t}{y} \sqcap \frac{a}{v}$ tollendo ipsas t et y ope aequationum 1 et 2 debet prodire aequatio illa ipsa, quae est figurae curvilineae ad quadrandum propositae, et conferendo terminos productae terminis datae, si nulla est in conferendo impossibilitas, habemus quadraturam. Sin oritur impossibilitas, certum est figuram analyticam propositam non habere analyticam quadratricem. Facile autem apparebit si quae ei addantur, quae eam insensibiliter immutent, posse inde figuram fieri quadrabilem, ob aliam plane aequationem prodeuntem. Caeterum ut impossibilitas appareat, considerandae sunt difficultates. Nimirum obstat quod aequatio producta est prolixitatis infinitae, data autem definita. Respondeo, eo ipso dum comparantur, videbitur quousque maximae potestates incognitarum indefinitae excurrere possint. Regeri potest, fieri posse ut producta aequatio indefinita plures habeat terminos quam finita data, et tamen ad eam reduci possit, quod scilicet per aliam vel finitam vel indefinitam dividi possit. Haec difficultas me diu jam anno abhinc tenuit, sed nunc video, non debere nos ea deterreri. Nam nunc fieri potest, ut methodo tangentium ex figura quadam determinata (cujus aequatio sit indivisibilis per rationalem) oriatur figura ambigua, quia non potest ad unum punctum figura quaelibet nisi unam habere tangentem. Ergo aequatio producta neque per finitam dividi potest, neque etiam per indefinitam, nam etiam figurae indefinitae revera, seu quarum ordinatae exprimuntur aequatione infinita, habent ordinatas easque aliquando finitas quae deberent satisfacere. Tametsi difficultatem adhuc exiguam praevideam, quod scilicet videatur fieri aliquando ut radices aequationum omnes non servant ad problematis solutionem. Ego tamen, ut verum fatear, credo. Alia est difficultas satis magna, quod scilicet fieri possit, ut aequatio finita exprimatur etiam per indefinitam, adeo ut aequatio producta coincidere possit cum data, etsi id non appareat, v. g. $y^2 \sqcap \frac{x}{1+x} \sqcap x - x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ etc. et ita infinitae aliae possunt formari variis compositionibus et divisionibus. Hic, fateor, difficilis nodus. Sed responderi sic potest: si quam habet figura quadratricem analyticam, utique ipsa sub indefinita intelligi potest; et tunc non dabit utique indefinitam, sed finitam datae aequivalentem. Eodem modo certum est, etiam quadratricem datae ordinarie tractatam, si qua est, datam solam non ambiguam daturam, adeoque et illa, quae ab ea non nisi nomine differt. Una superest difficultas, non videri judicari posse, quis sit ultimus vel primus terminus productae indefinitae, quia potest fieri ut termini inferiores destruantur, et tunc ipsa sit divisibilis vel per y vel per x vel per yx aut harum potestates. Et hoc non video quid prohibeat. Eademque manet difficultas sive a minimo sive maximo gradu incipias assumtam initio aequationem indefinitam. Pone ergo in aequatione producta dividi posse, necesse est absit quantitas cognita, item absint omnes termini, ubi sola x, vel si mavis, omnes termini, ubi sola abest y, quod si id examinando continue inciditur in impossibilitatem. In calculo hoc generali tunc pro certo habere poterimus solutam esse hanc difficultatem nec unquam posse evenire talem divisionem post calculum; sin fieri potest, tunc alii post alios destruentur, ut deprimi possit aequatio producta et instituenda comparatio, et tunc videndum, an non generaliter evinci possit, procedere non posse comparationem utcunque procedamus destruendo. Forte si figurae quadrandae redigantur antea ad simplicissimas aequationes, facilius detegentur impossibilitates. Nam et quadratrix praesumitur fore simplicior. Succurrit adhuc aliud auxilium, quod scilicet varii ad idem ducentes plane diversi inter se calculi institui possunt, quorum producti comparabiles.

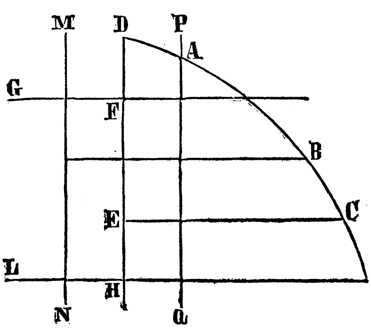


$BL \sqcap y$, $WL \sqcap l$, $BP \sqcap p$, $TB \sqcap t$, $AB \sqcap x$, $GW \sqcap a$, $y \sqcap$ omn. l. Ut obiter dicam, sunt numeri compositi, qui sibi addi non possunt vel demi per partes, nempe denominati a potestatibus seu sub potestatibus sive surdi. Sunt alii numeri denominati, qui nec in se multiplicari possunt per partes, et tales sunt numeri summarii v. g. omn. l non possunt multiplicari in omn. p, nec enim fieret $y^3 \sqcap^2 \overline{\text{omn. omn. } pl}$. Ut tamen multiplicatio illa fieri in rebus intelligatur, sic agendum: Volumus spatium, quod repraesentet omnes p in omnes l, non poterunt servire ductus Gregorii a St. Vincentio, quibus figurae in figuris dicuntur, sic enim non ducitur una ordinata in alias omnes, sed una ordinata in unam. At inquies, si una ordinata ducenda in alias omnes, prodibit spatium sursolidum, summa nimirum infinitorum solidorum. Huic malo remedium reperi sane admirabile. Repraesententur omnes l per lineam infinite parvam WL, id est opus est linea quadratrice omn. l, erit linea $BL \sqcap$ omn. l, quae ducatur in omnes p figura plana repraesentatas, fiet solidum. Si omnes l sint recta, et omnes p curva, fiet superficies curvilinea, ductui homogenea. Sed haec vetera; Ecce jam novum: Si ipsis WL, MG seu omnibus l imponatur singulis eadem curva repraesentans omnes p, debet antea curva p esse ejusdem plani, et sibi semper parallelo ejus plano existente per curvam AGL ferri, et habebitur, quod desideramus. Loco curvae et planum variis modis terminatum ita ferri potest per curvam, et fiet solidum; priore modo superficies curvilinea; et superficiei sive solidi sectio semper eadem. Possumus tamen fingere quod decrescant interim inter ferendum. Videndum an certus sit numerus superficierum analyticarum, ut linearum analyticarum, sed haec obiter. Nota: superficies curvilinea facta motu curvae sibi parallelae per curvam aequabitur cylindro curvae sub BL, summa omnium l, sed haec obiter. Porro $\frac{l}{a} \sqcap \frac{p}{\text{omn}\; l \sqcap y}$, ergo $p \sqcap \frac{\overline{\text{omn.}\; l}}{a}\, l$. Itaque omn. $y\,\frac{l}{a}$ non vult dicere omn. y in omn. l nec y omn. l; quare cum sit $p \sqcap \frac{y}{a}\, l$ sive $p \sqcap \frac{\overline{\text{omn.}\; l}}{a}\, l$, hoc vult dicere omn. l ductas in unum illud quod uni illi p respondet; ergo omn. $p \sqcap$ omn. $\frac{\overline{\text{omn.}\; l}}{a}\, l$; atqui aliunde demonstravi omn. $p \sqcap \frac{y^2}{2}$ sive $\sqcap \frac{\overline{\text{omn.}\; l}\,[2]}{2}$; ergo habemus theorema quod mihi videtur admirabile et novo huic calculo magni adjumenti loco futurum, nempe quod sit $\frac{\overline{\text{omn.}\; l}\,[2]}{2} \sqcap \text{omn.}\; \overline{\overline{\text{omn.}\; l}\;\frac{l}{a}}$ qualiscunque sit l, id est, si omnes l ducantur in ultimam et aliae omnes l rursus in suam ultimam, et ita quoties id fieri potest, summa horum omnium aequabitur dimidiae summae quadratorum, quorum latera sunt summae ipsorum l, seu omnes l. Pulcherrimum ac minime obvium theorema. Tale est etiam theorema: omn. $\overline{xl} \sqcap x.\; \overline{\text{omn.}\; l} - \overline{\text{omn. omn.}\; l}$, ponendo l esse terminum progressionis et x esse numerum qui exprimit locum seu ordinem ipsius l ei respondentis, seu x esse numerum ordinalem, l rem ordinatam. Nota: in his calculis obscervari potest lex homogeneorum, nam si omn. praefigatur numero seu rationi, vel infinite parvo, fit linea; si lineae, fit superficies, si superficiei, fit corpus; et ita in infinitum etiam ad dimensiones. Utile erit scribi $\int$ pro omn. ut $\int l$ pro omn. l, id est summa ipsorum l. Itaque fiet $\frac{\int \overline{l^2}}{2} \sqcap \int \overline{\int l \frac{l}{a}}$ et $\int \overline{xl} \sqcap x \int \overline{l} - \int \int l$. Et ita apparebit, semper observari legem homogeneorum, quod utile est, ut calculi errores vitentur. Nota: si analytice detur $\int l$, dabitur etiam l, ergo si detur $\int \int l$, dabitur etiam l, sed non si datur l, dabitur et $\int l$. Semper $\int x \sqcap \frac{x^2}{2}$. Nota: omnia haec theoremata vera de seriebus, in quibus differentiae terminorum ad terminos rationem habent minorem qualibet assignabili $\int x^2 \sqcap \frac{x^3}{3}$. Nota jam, si termini summandi affecti sint, quomodo hinc afficiatur summa, regulam generalem talem: v. g. $\int \frac{a}{b} l \sqcap \frac{a}{b} \times \int l$, scilicet si $\frac{a}{b}$ sit terminus constans, ducendus est in maximum ordinalem; quod si sit terminus inconstans, tunc tractari non potest nisi ad ipsum l reduci possit, vel utcunque ad quantitatem communem nempe ordinalem. Nota: quotiescunque in aequatione tetragonistica non nisi una est litera varians, ut l, tunc potest poni esse terminus constans, et $\int l$ erit $\sqcap x$. Et huic fundamento innititur theorema: $\int \overline{\frac{l^2}{2}} \sqcap \int \overline{\int l \, l}$, id est $\frac{x^2}{2} \sqcap \int x$. Eodem ergo modo statim innumera similia possunt solvi, ut $\int \overline{\frac{c}{a} \int \overline{l^2} + ba^2} + \int l^3 + \int l^3 \sqcap ea^3$, quaeritur qualis sit e; fiet $a^3 e \sqcap \frac{cx^3}{3} + ba^2 x + \frac{x^4}{4} + xa^3$. Nimirum $\int l^3 \sqcap x$, quia $l \sqcap a$ supponitur calculi causa $\int \frac{l}{a} \sqcap x$. $\int \overline{c \int l^2}$,

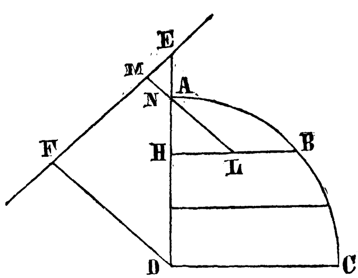
$\sqcap \frac{cx^3}{3}$, id est $\sqcap \frac{c\int \overline{l^3}}{3a^3}$, $\int ba^2 \sqcap \int l\, ba$. Intelligitur autem a esse unitatem. Satis haec nova et notabilia, cum novum genus calculi inducant. Pono ut ad priora redeamus. Datur l, relatio ad x, quaeritur $\int l$. Quod fiet jam contrario calculo, scilicet si sit $\int l \sqcap ya$. Ponemus $l \sqcap \frac{ya}{d}$, nempe ut $\int$ augebit, ita d minuet dimensiones. $\int$ autem significat summam, d differentiam. Ex dato y semper invenitur $\frac{ya}{d}$ sive l sive differentia ipsarum y. Hinc aequatio una mutari potest in aliam, ut ex aequatione: $\int \overline{c\int \overline{l^2}} \sqcap \frac{c\int \overline{l^3}}{3a^3}$ facere possumus $c \int \overline{l^2} \sqcap \frac{c\int \overline{l^3}}{3a^3 d}$. Nota: $\int \frac{x^3}{b} + \int \frac{x^2 a}{e} \sqcap \int \overline{\frac{x^3}{b} + \frac{x^2 a}{e}}$. Eodem modo $\frac{x^3}{db} + \frac{x^2 a}{de} \sqcap \frac{\frac{x^3}{b} + \frac{x^2 a}{e}}{d}$. Sed ut ad superiora redeamus. Investigare possumus $\int l$ bis, primum sumendo y et quaerendo $\frac{ya}{d} \sqcap l$ datae; deinde aliter sumendo $\frac{z^2}{2a} \sqcap y$ sive sumendo $\sqrt{2ay} \sqcap z$ et inde $\frac{z^2}{t} \sqcap p \sqcap l \sqcap \frac{ya}{d}$. Quare si in aequatione indefinita, in qua y et x, tollamus y substituendo in ejus locum $\frac{z^2}{2a}$ et investigemus ipsam t hujus novae aequationis indefinitae ut ante prioris; denique ope valoris $\frac{z^2}{t} \sqcap l$ et novi valoris t ex indefinita z, continente ipsas z et t, tollamus, restabit sola ex istis (tribus) x, z, t, l, litera l, et debet rursus aequatio prodire quae eadem esse debet tum cum data, tum cum paulo ante producta. Unde cum habeamus duas aequationes indefinitas earundem non tantum capitalium, sed et arbitrariarum, non nihil tamen dissimiles, quae coincidere debent, facere apparebit an aliqui termini possint tolli; an possibiles sit ista comparatio, aliaque id genus, et quod caput est, qui termini vere maximi et minimi seu numerus terminorum aequationis. Sed quoniam in Triangula similia *TBL*, *GWL*, *LBP* nondum intravit abscissa x seu punctum fixum A, nimirum ex puncto quodam fixo A ducatur AIQ indefinita ipsi LB parallela, occurrens tangenti LT in I, et sit $AQ \sqcap BL$; bisecetur AI in N, ajo summam omnium QN aequari semper Triangulo ABL, ut facile demonstrari potest ex alibi a me dictis. Quae rursus novum dant calculi fundamentum. Nimirum $\frac{xv}{2} \sqcap y$, ponendo $BL \sqcap v$ et $QN \sqcap l$ et $y \sqcap \int l$. $\frac{AI}{v} \sqcap \frac{t-x}{t}$ ergo $AI \sqcap \frac{t-x}{t} v$ et $QI \sqcap v - AI \sqcap v - \frac{tt}{t} v + \frac{xv}{t}$, $QI \sqcap \frac{xv}{t}$, $QN \sqcap QI + \frac{AI}{2} \sqcap \frac{xv}{t} + \frac{v}{2} - \frac{xv}{2t} \sqcap \frac{xv+tv}{2t} \sqcap l$. Et ope hujus aequationis $\frac{xv+tv}{2t} \sqcap l$ et hujus $y \sqcap \frac{xv}{2}$, et illa ipsa prima aequatione indefinita seu generali, jam tertium resumta, tollendo primum y, deinde t ope inventi valoris ipsius t ad x in aeq. ex x, v indefinita, ac denique v ope aeq. $\frac{xv+tv}{2t} \sqcap l$, habebitur rursus aequatio, in qua solae capitalium restabunt x et l, ut ante, quae concidere debet iterum datae. Habemus ergo tres aequationes productas diversis viis inventas, quae inter se et cum data coincidere debent et hae quidem tres non tantum sunt coincidentes, sed et iisdem constare debent literis et vocabulis, quod an fieri possit, analytice profecto mox apparebit.

1. November 1675.

Analyseos Tetragonisticae pars tertia.



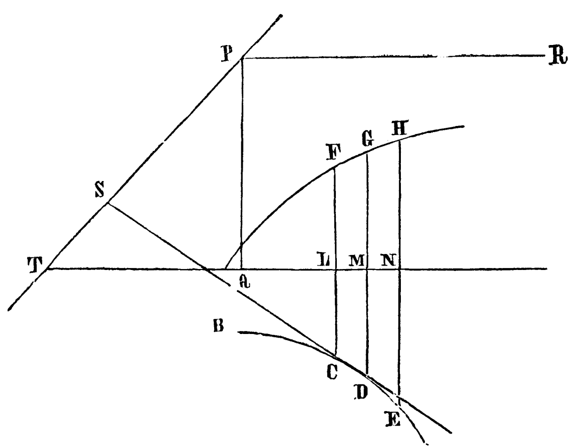
Diu est quod observavi, dato curvae ABC vel figurae curvilineae $DABCE$ momento ex duabus rectis inter se parallelis, ut GF, LH (vel MN, PQ) haberi aream figurae, quoniam duo momenta different inter se cylindro figurae, cujus altitudo distantia parallelarum. Hoc verum est in omnibus progressionibus sive numericis sive linearibus, id est etiamsi non adhibeantur figurae curvilineae, sed polygona ordinata, id est tametsi differentiae inter terminos non sint infinite parvae. Sit qualibet quantitas ordinata ut z, sit numerus ordinalis x, erit $b\ \overline{\text{omn.}\, z} \sqcap \pm\, \text{omn.}\, \overline{zx} \mp$ $\text{omn.}\, \overline{z \frown x + b}$, idque per se patet ex solo calculo. Ope hujus regulae inveniuntur summae terminorum progressionis Arithmeticae replicatae reciprocae. Et haec multiplicatio locum habet, cum quaeritur momentum ordinatarum ex recta ad axem perpendiculari. Sed si quaeritur momentum ex alia recta, regula generalis haec est: ex quantitatum, quarum summae momentum quaeritur, singularum centris gravitatis ducatur perpendicularis ad rectam librationis, summa rectangulorum sub distantiis sive perpendicularibus et quantitatibus aequabitur momento ex recta data. Unde si sit recta aequilibrii axi eadem, statim sequitur momentum figurae ex axe aequari summae quadratorum dimidiatorum. Et cum axi parallela est, ab eo differre data quantitate. Sed sumamus aliam rectam; in circulo exempli causa sit quadrans $ABCD$, vertex B, centrum D, detur alia recta EF ita scilicet, ut datae sint DF perpendicularis et FE, quo diameter ei occurrit, adeoque et DE. Sint ordinata circuli HB, cujus dimidium punctum L; ducatur LM perpendicularis ad EF, patet triangula EFD et EMN (N punctum intersectionis ML, AD) et LHN esse similia. Sit $AD \sqcap x$, erit $HL \sqcap \frac{y}{2}$ $\sqcap \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2}$; jam ob triangula similia $\frac{NH}{HL} \sqcap \frac{DF \sqcap d}{FE \sqcap f}$, ergo $NH \sqcap$ $\frac{d}{2f}\sqrt{a^2 - x^2} \sqcap \frac{yd}{2f}$, ergo $EN \sqcap DE$



$(\sqcap e) - HD\ (\sqcap x) - NH \left(\sqcap \frac{d}{2f}\, y\right)$, ergo $EN \sqcap e - x - \frac{dy}{2f}$. Jam NL $\sqcap \sqrt{NH^2 + HL^2} \sqcap \sqrt{\frac{d^2}{4f^2}\, y^2 + \frac{y^2}{4}} \sqcap \frac{y}{2}\sqrt{\frac{d^2}{f^2} + 1}$, et $\frac{MN}{EN} \sqcap \frac{NH}{NL}$ sive $MN \sqcap \frac{NH,\ EN}{NL}$ adeoque $MN \sqcap \frac{dy \frown}{2f}\, \frac{e - x - \frac{dy}{2f}}{\frac{y}{2}\sqrt{\frac{d^2}{f^2} + 1}} \sqcap \frac{d}{f\sqrt{\frac{d^2}{f^2} + 1}}\, \overline{e - x - \frac{dy}{2f}}$, et $ML \sqcap MN + NL \sqcap \frac{d}{f\sqrt{\frac{d^2}{f^2} + 1}}\, \overline{e - x - \frac{dy}{2f}} + \frac{y}{2}\sqrt{\frac{d^2}{f^2} + 1}$ $(e \sqcap \sqrt{f^2 - d^2})$ sive $ML \sqcap \frac{\overline{d\sqrt{f^2 - d^2} - x - \frac{d}{2f}\, y} + \frac{d^2 + f^2}{2f}\, y}{\sqrt{d^2 + f^2}}$

$\sqcap \dfrac{\overline{d\sqrt{f^2-d^2}-x}+\frac{fy}{2}}{\sqrt{d^2+f^2}}$, qui calculus cuilibet curvae communis est, sumta semper x pro abscissa et y pro ordinata. Rectangulum ergo sub ML et HB ($\sqcap y$) sive momentum cujusque ordinatae ex recta EF ponderatae sive wa erit $\sqcap \dfrac{\overline{\overline{d\sqrt{f^2-d^2}y-xy}+\frac{f}{2}y^2}}{\sqrt{d^2+f^2}}$. Ergo omn. w habebuntur ex datis omn. y, omn. xy et omn. y^2, vel etiam si ex his quatuor dentur tres, dabitur quartum. Jam omn. xy aequantur momento figurae ex vertice, omn. y^2 aequantur momento figurae ex axe; ergo datis tribus figurae momentis, ex duabus scilicet rectis inter se perpendicularibus et tertia qualibet, datur ejus area. Sed hoc tamen theorema minus generale est, quam prius in prima hujus Schediasmatis pagina, ubi nihil refert quis sit angulus rectarum, modo dentur tria momenta. Intelligitur autem semper in eodem plano (Hoc interim theorema sufficit ad curvam Hyperbolae primariae, si f sit infinita seu si FE et ED parallelae, fiet $dy + \dfrac{y^2}{2} \sqcap wa$, quod dudum constat). Notandum, diversis calculis aream quantitatis, cujus centrum gravitatis (etsi non ipsa tota) in plano dato positum est, ex datis tribus momentis ex tribus ejusdem plani rectis inveniri. Unde videndum, an non comparati inter se eventus quiddam novum praebeant. Si non figurae, sed curvae omnium BP, PC etc. momenta quaerantur, ex punctis B, P, C, tantum ad rectam demittendae perpendiculares sive ordinatae; nihil enim refert, ex extremo an medio ipsius BP v. g. ducantur, differentiae enim infinite parvae inter duas ejusmodi perpendiculares. Ergo curvae elementum appellando z, momentum curvae ex recta EF fiet $\dfrac{d\sqrt{f^2-d^2}z - dxz + fyz}{\sqrt{d^2+f^2}}$.

Pleraque theoremata Geometriae indivisibilium, quae apud Cavalerium, Vincentium, Wallisium, Gregorium, Barrovium extant, statim ex calculo patent, ut v. g. perpendiculares ad axem aequari superficiei seu momento curvae ex axe, nam invenies perpendicularem aequari rectangulo ex curvae elemento in ordinatam. Talia igitur theoremata non aestimo, quemadmodum illa quoque de applicationibus interceptarum in axe (inter tangentes et ordinatas) ad basin. Talia ergo theoremata nihil novi detegunt nec nisi calculi compendia praebent. At meum theorema de dimensione segmentorum rem detegit novam, quia spatium, cujus quaeritur dimensio, aliter resolvit, nempe non tantum in ordinatas, sed in triangula. Centrobaryca etiam forte aliquid detegunt novum. Poterit forte facilis methodus tradi, qua sine figuris, calculo deducantur ex figura, quae ex ea pendent. Gregorii theorema de ductibus parabolarum subalternis aequalibus cylindro patet statim ex calculo, nam circuli ordinata $y \sqcap \sqrt{a^2 - x^2}$, id est $\sqcap \sqrt{a + x}$ in $\sqrt{a - x}$; eodem modo $\sqrt{2av - v^2} \sqcap y$, ergo y $\sqrt{v}$ in $\sqrt{2a - v}$, quae duo eodem redeunt. Si eadem ordinata y per quandam quantitatem z multiplicetur, et postea per eandem $z \pm$ cognita sive constante b, erit differentia summarum productorum aequalis cylindro figurae: ut zy „ $- zy + by \sqcap by$. Hoc etsi per se manifeste pateat in genere, applicationes tamen non semper manifestae. Sit v. g. $\frac{x^2}{ax - b^2}$ id est $\frac{x,\ x}{\sqrt{ax} + b,\ \sqrt{ax} - b} \sqcap y$, multiplicando per $\sqrt{ax} + b$ fiet $\frac{x^2}{\sqrt{ax} - b}$ (☽) et multiplicando per $\sqrt{ax} - b$ fiet $\frac{x^2}{\sqrt{ax} + b}$ (⊙): quoniam autem pro $\frac{ax^2}{ax - b^2}$ fieri potest $x + \frac{b^2 x}{ax - b^2}$, quae pendet ex quadratura hyperbolae, itaque una ex his duabus data ☾ et ⊙, dabitur et altera, supposita hyperbolae quadratura.



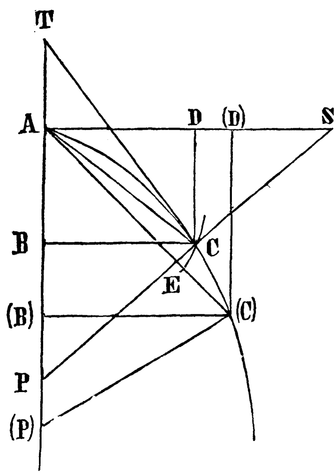
Suppone curvae cuidam in aliquo plano positae *BCDE* in punctis *C*, *D*, *E* imponi alterius curvae *F G H* (imo et aliter) ordinatas perpendiculariter ad planum, et ita ut medium ordinatae punctum incidat in planum, patet ipsas *LG*, *MD*, *NE*, ductas in *FL*, *GM*, *HN*, id est in *C*, *D*, *E* impositas curvae *BCDE* seu rectangulum *FLG*, *GMD*, *HNE*, sive ductum horum duorum planorum in se invicem aequari momento omnium *LC*, *MD*, *NE* etc. Unde si *PR* sit alius axis et intervallum a *QL* recta *PQ*, momentum ex *PR* differet a momento ex *QL* cylindro ipsarum *LC*, *MD* etc. in *PQ*. Quod si jam tum ex recta *PQ*, tum alias ex alia recta, ut *TS*, aliud haberetur momentum ejusdem figurae ordinatarum *LF* in *C* impositarum, tunc haberetur etiam cylinder omnium *LF*, quod probo: quia appellando *QL*, x; *CL*, y, erit *TC* $\sqcap \frac{f}{a}x + \frac{g}{a}y + h$, quae ducta in ipsam z (*LF* vel *MG* $\sqcap z$) dabit: $\frac{f}{a}zx + \frac{g}{a}yz + hz$. Jam zx datur, supposito momento ex *PQ*, quod semper idem, sive sint ipsae z, ubi erant in *LF*, *MG* etc. sive sint positae in *C*, *D*, *E*. Datur et yz, sive rectangulum pro *FLC* sive ductus ex hypothesi. Ergo si detur adhuc unum momentum ordinatarum curvae in *C*, *D*, *E* impositarum, sit ipsum aequale $\frac{f}{a}zx + \frac{g}{a}yz + hz$, dabitur hz seu cylinder quaesitus. Hinc eligendae curvae *BCDE* tales, ut per diversas earum ordinatas vel in axem *QL*, vel in axem *TS* multiplicari possint ordinatae curvae datae cum utilitate quadam seu simplicitate, ad quod eae curvae utiles, quae plures habent axes utiles, ut Hyperbola circularis seu primaria, quae duas habet asymptotos, et axem, et axem conjugatum.

Beilage III.

11. November 1673.*)

Methodi tangentium inversae exempla.

Jam superiore anno mihi proposueram quaestionem, quae inter difficillimas totius Geometriae haberi potest, vel ideo quod nihil conferunt methodi hactenus vulgatae. Ejus hodie solutionem reperi cujus analysin dabo: Nimirum quaeritur curva $C\,(C)$ in qua ipsae BP intervalla ordinatarum BC, et perpendicularium ad curvam PC, in axe $AB\,(B)$ sumta, sint ipsis ordinatis BC reciproce proportionalia. Sit alia recta $AD\,(D)$ ad ipsam $AB\,(B)$ axem normalis, in quam ducantur ordinatae CD, ita ut ipsae AD abscissae ex axe $AD\,(D)$ sint ipsis BC ordinatae ad axem $AD\,(D)$ aequales ipsis AB abscissis ex axe $AB\,(B)$. Apellemus $AD = BC = y$, et $AB = DC = x$; ipsam BP vocemus w et ipsam $B\,(B)$ vocemus z. Constat ex alibi a me demonstratis: esse $\int \overline{wz} = \frac{y^2}{2}$, sive esse $wz = \frac{y^2}{2d}$ **). At ex quadratura Trianguli



*) Muss 1675 heissen. Es ist mit dieser Jahreszahl eine Fälschung versucht worden. Die Spuren davon sind deutlich zu sehen; der obere Zug der 5 ist wegradirt und dafür mit schwärzerer Dinte der obere Zug von 3 gesetzt.

**) Leibniz hat am Rande bemerkt: $\int$ summa, d differentia.

patet esse $\frac{y^2}{2d} = y$. Ergo $wz = y$. Jam ex hypothesi est $w = \frac{b}{y}$, ita enim erunt ipsae w ipsis y reciproce proportionales. Ergo fiet: $\frac{bz}{y} = y$, adeoque $z = \frac{y^2}{b}$. Jam $\int z = x$. Ergo $x = \int \frac{y^2}{b}$. At $\int \frac{y^2}{b} = \frac{y^3}{3ba}$ ex quadratura Parabolae; ergo $x = \frac{y^3}{3ba}$, quae est aequatio explicans relationem inter ordinatas y et abscissas x curvae quaesitae C (C). Inventam ergo habemus curvam quae est Analytica, et uno verbo Parabola Cubica, cujus vertex A.

Videbimus ergo, an verum sit hoc Theorema sane memorabile: „In Parabola Cubica C (C) sunt BP intervalla perpendicularium ad curvam PC et ordinatarum BC ad axem, in axe ABP sumta ipsis ordinatis BC reciproce proportionalia.“ Hoc calculus tangentium facile ostendet. Aequatio Parabolae Cubicae: $xc^2 = y^3$, ponendo c latere recto, sive pro c^2 ponendo $3ba$, sive $c = \sqrt{3ba}$, fiet: $3xba = y^3$. Ergo ex methodo tangentium Slusii erit $t = \frac{y^3}{ba}$, ponendo $BT = t$, intervallo inter tangentem et ordinatam in axe. Jam $BP = w$ est $= \frac{y^2}{t}$. Ergo $w = \frac{y^2}{\frac{y^3}{ba}} = \frac{ab}{y}$. Sunt ergo ipsae w ipsis y reciproce proportionales, quod desiderabatur.

Analyseos hujus artificium in eo fuit, quod ex ordinata abscissam fecimus, cujus stratagematis antea non venerat in mentem. Non est difficilior quaestio, si quaeratur curva, in qua ipsae BP intervalla ordinatarum et perpendicularium sint ipsis AB abscissis reciproce proportionales. Nempe $w = \frac{a^2}{x}$; jam $\int w = \frac{y^2}{2}$, ergo $y = \sqrt{2\int w}$ vel $\sqrt{2\int \frac{a^2}{x}}$. Jam $\int w$ non potest inveniri nisi ope curvae logarithmicae. Ergo et figura, quae satisfaciat, est in qua ordinatae sunt in subduplicata ratione logarithmorum ab abscissis, quae figura est ex numero Transcendentium.

At revera difficilior est quaestio, cum quaeritur ut ipsae AP sint ipsis BC ordinatis reciproce proportionales. Nempe $x + w = \frac{a^2}{y}$ et

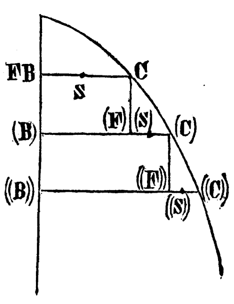
$wz = \frac{y^2}{2d}$, et $\int z = x$ sive $z = \frac{x}{d}$ sive fiet: $w\frac{x}{d} = \frac{y^2}{2d}$ et $w = \frac{y^2}{2d} \smile \frac{x}{d}$ et fiet: $x + \frac{y^2}{2d} \smile \frac{x}{d} = \frac{a^2}{y}$. Ponendo ipsas x arithmeticas, erit $\frac{x}{d} = z$ constans et fiet: $x + \frac{y^2}{2d} = \frac{a^2}{y}$ et $\int x = \int \frac{a^2}{y} - \frac{y^2}{2}$, et $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \int \frac{a^2}{y}$ sive $d\overline{x^2 + y^2} = \frac{2a^2}{y}$. Jam junctae AC, $A\,(C)$ sunt $= \sqrt{x^2 + y^2}$. Centro A, radio AC, describatur arcus CE, ita ut E cadat in rectam $AE\,(C)$, erunt ipsae $E\,(C)$ differentiae inter AC et $A\,(C)$, sive $EC = e = d\overline{x^2 + y^2}$. Ergo $e = \frac{2a^2}{y}$. Si ergo liceret y sumere Arithmeticae progressionis, haberemus quaesitum; videtur tamen nihil referre, etsi x progressionis arithmeticae sumserimus. Sumtis enim x progressionis Arithmeticae, sequitur, ipsis AD sive y esse ipsas EC sive e reciproce proportionales. Quod si autem sunt semel, erunt semper. Summae autem infinitarum reciproce proportionalium habentur, quacunque sint progressione, ex quibus reciproce proportionales sumuntur, neque enim hic rectangulorum ulla ratio habetur, ubi aequali altitudine opus est, sed summa linearum, omnium scilicet $E\,(C)$, initur. Sed jam video difficultatem ipsam omnium e summam sive omnes $\frac{2a^2}{y}$, sive ipsas $A(C)$ non haberi, nisi sciatur cujus progressionis sint ipsae y. Quod hoc loco ignoratur, quoniam ipsas x necesse est esse progressionis Arithmeticae, non ipsas y. Sin jam in aequatione superiore $x + \frac{y^2}{2d} \smile \frac{x}{d} = \frac{a^2}{y}$ faciamus y progressionis Arithmeticae, fiet: $x + \frac{y}{dx} = \frac{a^2}{y}$*) et $xy + \frac{y^2}{dx} = a^2$; imo generaliter neutri assignando progressionem, fiet: $xy + y\frac{d\overline{\frac{y^2}{2}}}{dx} = a^2$ ($\odot$). Sed nondum quicquam praestitimus; considerandum ergo ex doctrina indivisibilium, producta PCS dum ipsi AD occurrat in S, esse summam omnium AP applicatarum ad AB, aequalem summae omnium AS applicatarum ad AD, id est vocando

---

*) Idem est dx et $\frac{x}{d}$, id est differentia inter duas x proximas. Bemerkung Leibnizens.

$DS = v$, fiet $dy\int y + dy\int v = dx\int x + dx\int w$, sive $dy\int y + dy\int v = dx\int\frac{a^2}{y}$ ex hypothesi quaestionis. Ponendo jam y progressionis Arithmeticae fiet: $\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = dx\overline{\text{Log}\,y}$. At paulo ante eadem facta suppositione ipsarum y progressionis Arithmeticae fuit $xy + \frac{y^2}{dx} = a^2$ fiet: $dx = \frac{y^2}{a^2 - yx}$ et nunc: $dx = \frac{y^2 + x^2}{2\,\text{Log}\,y}$; ergo habemus denique aequationem, in qua solae supersunt x et y extra vincula, nempe: $\overline{y^2 + x^2}$, $a^2 - yx = 2y^2\overline{\text{Log}\,y}$, quae aequatio, cum sit determinata, locum dabit quaesitum. Et valde memorabilis est haec methodus, cum enim non sit in nostra potestate tot aequationes habere quot incognitas, poterimus tamen saepe plusculas obtinere aequationes, et earum ope quosdam terminos elidere, ut hoc loco $d\overline{x}$, quae sola nobis obstabat. Singulae aequationes totam includebant aequationis naturam, nec tamen ex iis erui poterat solutio, quod media facilia haetenus desint, conjunctio duarum aequationum rem compendio dedit. Videor idem aliter obtinere potuisse per momenta. Ubi in mentem venit consideratio nova non inelegans.

Fig. 2.



In Fig. 2 est $BC = y$, $FC = d\overline{y}$. Sit punctum S medium ipsius FC, patet momentum ipsius FC esse rectangulum sub FC et BS, id est rectangulum BFC; nam cum sit $BFC + SFC$, posterius quippe prioris ratione infinite parvum negligi potest, adeoque erit $\int\overline{yd\overline{y}} = \frac{y^2}{2}$ sive momentum omnium differentiarum FC aequabitur ultimi termini momento, et $ydy = d\overline{\frac{y^2}{2}}$ et $y^2dy = \frac{yd\overline{y^2}}{2}$. Porro supra in aeq. (⊙) faciendo x arithmeticam fuit $yd\overline{\frac{y^2}{2}} = a^2 - xy$ sive $d\overline{\frac{y^2}{2}} = \frac{a^2 - xy}{y}$, at idem $= yd\overline{y}$; fiet ergo $yd\overline{y} = \frac{a^2 - xy}{y}$ et erit $\int\overline{yd\overline{y}} = \int\overline{\frac{a^2}{y}} - \frac{x^2}{2}$. At jam invenimus esse $\int\overline{yd\overline{y}} = \frac{y^2}{2}$, fiet ergo $y^2 + x^2$

$= 2\int \frac{a^2}{y}$ ut ante, vel $\overline{dy^2 + x^2} = \frac{2a^2}{y}$. Ubi patet res notabilis, in his aequationibus in quibus reperiuntur $\int$ et d, ubi jam una, v. g. hic x pro arithmetice procedente sumta est, non posse jam inverti, nec dici nos habere valorem ipsius x, nempe $x = \frac{2a^2}{y} - \overline{dy^2}$, quia $\overline{dy^2}$ non potest intelligi nisi determinata progressionis natura ipsius y; ipsius y autem progressio, ut $\overline{dy^2}$ serviat, talis sumi debet ut sint x progressionis Arithmeticae, ergo ipsae $\overline{dy}$ supponunt ipsas x, non ergo per ipsas invenietur x. Caeterum hac arte multa poterunt praeclara haberi theoremata de curvis alias intractabilibus, jungendo scilicet plures ejusmodi aequationes.

Ut in hujus modi quaestionibus sane difficillimis simus exercitatiores, utile erit adhuc unam experiri, ut scilicet ipsae AP sint ipsis AB reciproce proportionales; fiet: $x + w = \frac{a^2}{x}$, et $zw = \overline{dy^2}$ et $z = \overline{dx}$, adeoque fiet: $w = \frac{d\overline{\frac{y^2}{2}}}{z} = \frac{d\overline{\frac{y^2}{2}}}{\overline{dx}}$ et denique $x + \frac{d\overline{\frac{y^2}{2}}}{dx} = \frac{a^2}{x}$. Cujus jam non difficilis solutio est, nam ponendo x arithmeticas, fiet: $\int x + \frac{y^2}{2} = \int \frac{a^2}{x}$, sive fiet: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \overline{\text{Log. } y}$, sive $\sqrt{x^2 + y^2} = AC = \sqrt{2 \text{ Log. } AD}$, quae expressio curvae satis est simplex. Requiruntur autem ipsae AP progressionis arithmeticae. Contra si sint y progressionis arithmeticae, fieret: $x + \frac{y}{dx} = \frac{a^2}{x}$; sed hinc non facile habebitur natura curvae.

Videamus an possit esse curva, in qua ipsae AC ipsis BP aequales; fiet: $\sqrt{x^2 + y^2} = w$ et $w = \frac{dy^2}{2dx}$. Sit x progressionis arithmeticae, fiet $\left(\int \sqrt{\overline{x^2 + y^2}} = \right) \int AC = y^2$, sed non hoc sufficit ad curvam mechanice describendam, per puncta scilicet proxime accedentia. Ut sit $x = 1$, sit $BC = (y)$, erit $\sqrt{1 + (y^2)} = (y^2)$ sive $1 + (y^2) = (y^4)$. Unde habetur (y), nemque $y^4 - y^2 + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$, sive $(y^2) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $(y) = \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{2}}$. Porro eodem modo $\underset{AC}{\sqrt{4 + ((y^2))}} + \underset{A(C)}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}}{2}}} = ((y^2))$, ita rursus poterit inveniri

$((y))$. Et hujus ope reperietur tertia AC, et ita reperietur polygonum aliquod curvilineo quaesito eo similius, quo minor assumta est unitas.

x esse progressionis Arithmeticae significat motum (inter describendum) in axe AB esse uniformem. Descriptiones autem, quae supponunt motum aliquem esse uniformem, non sunt prorsus in nostra potestate. Neque enim possumus producere motum uniformem, nisi continue interruptum.

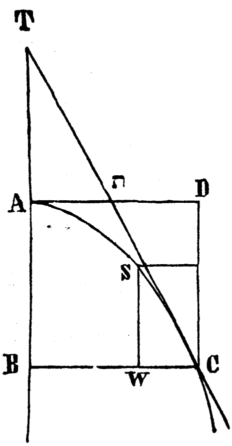
Videndum an $dxdy$ idem sit quod $\overline{dxy}$, et an $\frac{dx}{dy}$ idem quod $d\frac{x}{y}$, et videtur, ut sit $y = z^2 + bz$ et x sit $cz + d$, fiet $dy = z^2 + 2\beta z + \beta^2$, $+ bz + b\beta$, $- z^2 - bz$, et fiet $dy = \overline{2z + b\beta}$. Eodem modo $dx = + c\beta$, et ita erit $dydx = \overline{2z + b}\, c\beta^2$. At idem produces, si statim facias dxy. Nam in singulis factoribus separatim destructio fit, altero in alterum non influente; idem est de divisoribus. Sed jam cum earum summae quaeruntur, discrimen an sit, videndum est. $\int dx = x$, $\int dy = y$, $\int \overline{dxy} = xy$.*)

Si jam sit aequatio v. g. $dxdy = x$, erit $\int \overline{dxdy} = \int x$. Jam $\int x = \frac{x^2}{2}$, ergo $\int \overline{dxdy} = \frac{x^2}{2}$, sive $xy = \frac{x^2}{2}$, sive $\frac{x}{2} = y$, quod satisfacit aequationi $dxdy = x$; nam pro y ponendo ejus valorem fiet: $dx \frac{dx}{2} = x$ sive $\frac{dx^2}{2} = x$, quod verum esse constat. In summis haec non procedunt, nam $\int x \int y$ non est idem quod $\int \overline{xy}$; ratio est, quod differentia est quantitas unica, at summa est quantitatum plurium aggregatum. Summa differentiarum est terminus novissimus. At ex summis facientium invenire summas productorum, nondum analytice, certa ratione possumus, et quae in eo genere fecit Wallisius non demonstratione, sed felici inductione, nituntur. Demonstrationem tamen eorum invenire, magni res foret momenti. Sint $\int \overline{zy}$, quae quaeruntur. Ponatur $\int \overline{zy} = w$, erit $zy = d\bar{w}$, et $y = \frac{\overline{dw}}{z}$,

*) Error, vide infra (Bemerkung von Leibniz).

et $\int y = \int \overline{\frac{dw}{z}}$. Eodem modo $\int z = \int \overline{\frac{dw}{y}}$. Ponatur $\int y$ nota $= v$, et $\int z$ nota $= \psi$, fiet $y = dv = \frac{\overline{dw}}{z}$ et $z = d\psi = \frac{dw}{y}$ et $\frac{dv}{d\psi} = \frac{z}{y}$. Unde sequi videtur $d\frac{v}{\psi} = \frac{z}{y}$, adeoque $\frac{v}{\psi} = \int \frac{z}{y}$. Ergo foret $\int \frac{z}{y} = \frac{\int z}{\int y}$, quod est absurdum. Unde sequitur $\int \frac{dv}{d\psi}$ non esse $\frac{v}{\psi}$. Quid ergo erit? Differentia ipsarum v, divisa per differentiam ipsarum ψ summenda est. Non ergo quaelibet differentiarum, adeoque et tota v, dividenda erit per singulas ipsius ψ; non, inquam, quia singulae tantum per singulas respondentes sibi dividuntur, non quaelibet per omnes. Ergo aliud est $\int \frac{dv}{d\psi}$ quam $\frac{\int dv = v}{\int d\psi = \psi}$. Ergone aliud erit $d\frac{v}{\psi}$ quam $\frac{dv}{d\psi}$? Si idem est, etiam $\int d\frac{v}{\psi}$ erit $= \int \frac{dv}{d\psi}$, sive $\frac{v}{\psi} = \int \frac{dv}{d\psi} = \frac{\int dv}{\int d\psi}$, quod absurdum est.

Eodem modo, an $d\overline{v\psi} = dv d\psi$. Ergo $\int dv\psi$ sive $v\psi = \int dv d\psi$. Jam $v\psi = \int dv \int d\psi$; ergo $\int \overline{dv d\psi} = \int dv \int d\psi$, quod est absurdum. Ergo absurdum esse videtur $dv d\psi$ idem esse quod $dv\psi$, itemque $\frac{dv}{d\psi} = d\frac{v}{\psi}$, quod tamen paulo ante asserueram, et quod videtur demonstrativum. Difficilis nodus. Sed jam distinguendum video: Si sit v et ψ et faciant $v\psi$ vel $\frac{v}{\psi}$ quantitatem aliquam v. g. $\aleph = v\psi$ vel $\frac{v}{\psi}$, sintque valores tam ipsius v quam ipsius ψ rationales per unam quandam, v. g. abscissam x expressi, tunc calculus semper docebit eandem produci differentiam, sive idem fore $d\aleph$ et $dv d\psi$ vel $\frac{dv}{d\psi}$. Sed jam video ista nunquam procedere, nec per partes in his iri posse, nam v. g. sit $x + \beta, \frown x + \beta,, -, x, x,$ fiet $2\beta x,$ quod longe aliud est quam $x + \beta, - x,, \frown x + \beta, - x$ quod daret β? Concludendum ergo aliud esse $d\overline{v\psi}$ quam $dv d\psi$, aliudque $d\frac{v}{\psi}$ quam $\frac{dv}{d\psi}$.



Sit primus gradus $a+bx+cy=o$; $D\sqcap=\Theta$, $AB=x$, $BC=y$, $TB=t$; ordinando et accommodando ad tangentes, fiet: $bt=-cy$, et $t=\frac{-cy}{b}$. Eodem modo $\Theta=\frac{-bx}{c}$. Sit $WE=w$ et $WS=\beta$, patet esse: $\frac{t}{y}=\frac{\beta}{w}$, et fiet: $w=\frac{-\beta b}{c}$. Eodem modo $\beta=\frac{-wc}{b}$. Secundus gradus: $a+bx+cy+dx^2+cy^2+fyx=o$; ordinando ad tangentes fiet: $bt+2dxt+fyt=-cy-2ey^2-fyx$, adeoque $t=\frac{-cy-2ey^2-fyx}{b+2dx+fy}$. Unde facile patet, semper t per y (et Θ per x) dividi posse et quoniam $w=\frac{\beta y}{t}$, ideo fiet hic $w=\frac{\beta\,\overline{b+2dx+fy}}{-c-2ey-fx}$, adeoque fiet: $y=\frac{-w\overline{c+fx},\frown\beta\overline{b+2dx}}{f+2e}$, at paulo ante $y=\frac{-a-bx-dx^2}{c+ey+fx}$ et fiet:

$$y=\frac{-w,\overline{c+fx},\frown\beta\,\overline{b+2dx},\frown\overline{c+fx},,,+\overline{f+2e}\frown\overline{a+bx+dx^2}}{-w\overline{c+fx},\frown-\beta\,\overline{b+2dx},\frown-e}$$

$$=\frac{-w\overline{c+fx},\frown-\beta\,\overline{b+2dx}}{f+2e}.$$

Habemus ergo aequationem, in qua nulla est amplius y. Et omnes figurae, quarum aequatio ex hac aequatione pro varia explicatione literarum constantium formari potest, quadrari possunt; illae item, quae ipsi per methodos alias ostendi possunt σύγνωτοι.

Beilage IV.

November 1676.

Calculus Tangentium differentialis.

$$d\overline{x} = 1 \quad d\overline{x^2} = 2x \quad d\overline{x^3} = 3x^2 \text{ etc.}$$

$$d\overline{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} \quad d\overline{\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{x^2} \quad d\overline{\frac{1}{x^3}} = -\frac{3}{x^2} \text{ etc.}$$

$$d\overline{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ etc.}$$

Ex his colligitur regula generalis haec pro differentiis ac summis simplicium potestatum $d\overline{x^e} = e, x^{e-1}$ et contra $\int \overline{x^e} = \frac{x^{e+1}}{e+1}$.

Unde $d\overline{\frac{1}{x^2}}$ seu $d\overline{x^{-2}}$ erit $-2x^{-3}$ seu $-\frac{2}{x^3}$ et $d\overline{\sqrt{x}}$ seu $dx^{\frac{1}{2}}$ erit $-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ seu $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}$.

Sit $y = x^2$, et erit $d\overline{y} = 2xd\overline{x}$, ergo $\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = 2x$ *). Quae ratioci-

---

*) Am Rande des Manuscripts hat Leibniz bemerkt: Praeclara haec observatio est ad calculum meum differentiarum, si sit $b, \overline{ydx + xdy + etc} = 0$ fore $\overline{byx} + \int \overline{etc.} = 0$, et ita de caeteris. Videndum quid de h^3 faciendum. Ad istos calculos melius faciendos poterit aequatio $ay^2 + byx + cx^2 + etc.$ transmutari in aliam alia curvae relatione, et comparabitur proveniens alio differentiarum calculo, cum eo quod per istum prodit.

natio est generalis, nec refert quae sit progressio ipsarum x. Eodemque modo generalis regula ita stabit: $\frac{d\overline{x^e}}{dx} = ex^{e-1}$ et vicissim $\int \overline{x^e d\bar{x}} = \frac{x^{e+1}}{e+1}$.

Sit aequatio quaelibet, v. g.

$$ay^2 + byx + cx^2 + f^2x + g^2y + h^3 = 0$$

et pro y scribendo $y + d\bar{y}$ ac pro x similiter $x + d\bar{x}$ *), fiet omissis omittendis alia aequatio:

$$\left.\begin{array}{l} ay^2 + byx + cx^2 + f^2x + g^2y + h^3 = 0 \\ \hline a^2d\overline{yy} + byd\bar{x} + 2cxd\bar{x} + f^2d\bar{x} + g^2d\bar{y} + bxd\bar{y} \\ \hline ad\bar{y}^2 + bd\bar{x}d\bar{y} + cd\bar{x}^2 = 0 \end{array}\right\} = 0$$

Quae est regulae a Slusio publicatae origo. Eam vero ita in infinitum amplificabimus: Sint literae quotcunque, et ex iis composita formula, verbi gratia ex literis tribus sit formula:

$$ay^2 \quad bx^2 \quad cz^2 \quad fyx \quad gyz \quad hxz \quad ly \quad mx \quad nz \quad p = 0$$

Unde fiet alia aequatio:

$$\begin{array}{llllllll} ay^2 & bx^2 & cz^2 & fyx & \text{simi-} & ly & mx \ \text{simi-} & p \\ \hline 2ad\overline{yy} & 2bd\overline{xx} & 2cd\overline{zz} & fyd\bar{x} & \text{liter} & ld\bar{y} & md\bar{x} \ \text{liter} & \\ & & & fxd\bar{y} & & & & \\ \hline ad\bar{y}^2 & bd\bar{x}^2 & cd\bar{z}^2 & fdxd\bar{y} & & & & \end{array}$$

Unde patet eadem methodo haberi tangentia superficierum plana, et alioqui nihil referre an non ipsae literae x, y, z aliquam habeant cognitam relationem, ea enim postea substitui potest.

Hinc praeclare serviet eadem methodus, etsi compositae fractiones aut irrationales calculum ingrediantur, nec opus est earum tollendarum causa caetera exaltari, cum potius ipsarum differentiae separatim inveniri ac substitui possint: deinde cum methodus tangentium publicata non nisi

---

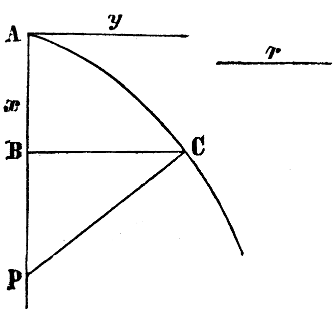
*) Leibniz hat am Rande des Manuscripts bemerkt: Alterutra ex his $d\bar{x}$ vel $d\bar{y}$ pro arbitrio explicari potest, adhibita aequatione nova, et alterutra harum $d\bar{x}$ vel $d\bar{y}$ sublata et x scilicet vel y aliter per quantitates explicanda. Verum non puto id esse, quia catalogus omnium curvarum quadrabilium prodire debet, alterutram sumendo constantem.

tunc procedat, cum ordinatae parallelae sunt, ista et ad tangentes et alias quascunque, imo illas quoque relationes accommodari potest, quae sunt ordinatarum ad curvarum portiones aut in quibus angulus ordinatarum certa lege mutatur. Caeterum speciatim operae pretium erit rem ad irrationales ac fractiones compositas accommodare.

$d\sqrt[2]{a + bz + cz^2}$, ponatur $a + bz + cz^2 = x$, *et* $\frac{d\sqrt[2]{x}}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$, jam $\frac{d\bar{x}}{dz} = b + 2cz$: ergo $d\sqrt[2]{a + bz + cz^2} = -\frac{b + 2cz}{2d\bar{z}\sqrt{a + bz + cz^2}}$.

Sumta aequatione duarum literarum x, y pro curva, et determinata aequatione ad tangentes, tolli potest alterutra ipsarum x et y, ita ut restet altera tantum una cum $d\bar{x}$ et $d\bar{y}$, quod per omnes casus calculari operae pretium est.

Datis tribus literis, ut x, y, z, et valore ipsius $d\bar{z}$ ope ipsius x vel y (vel etiam utriusque) expresso, habebitur denique aequatio tangentium, in qua erit etiam tantum alterutra harum x et y et duae $d\bar{y}$, $d\bar{x}$; aliquando et ipsa z non poterit tolli. Hoc etiam per omnes casus assumti valoris ipsius $d\bar{z}$ deduci potest, eodem modo plures adhuc literae assumi possunt. Et conjunctis in unum calculis universalibus omnibus, universalissimus ex ipsis fiet. Caeterum assumtio plurimarum literarum usum habere potest ad methodi tangentium universae problemata ope quadraturarum solvenda. Ut si propositum sit problema solvere, in quo summa rectarum *CB*, *BP* sit data seu $y + \frac{yd\bar{y}}{dx} = xy$, fiet $d\bar{x} + d\bar{y} = xd\bar{x}$ seu $x + y = \frac{x^2}{2}$. Ita habemus curvam in qua summa earum *CB* + *BP* (in constantem r) aequatur rectangulo *ABC*.

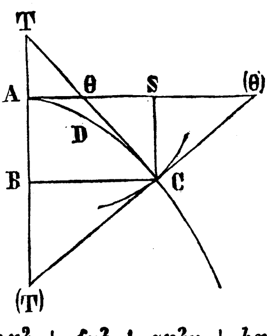


Beilage V.

11. Julii 1677.

Methode generale pour mener les touchantes des Lignes Courbes sans calcul, et sans reduction des quantités irrationelles et rompues.

Monsieur Slusius a publié la methode pour trouver sans calcul les touchantes des lignes courbes, dont l'equation est purgée des quantités irrationelles ou rompues. Par exemple une courbe DC estant donnée, dont l'equation exprime la relation de BC ou AS que nous appellerons y, à AB ou SC, appellée x, soit



$$a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 + gx^2y + hxy^2 + kx^3 + ly^3 \text{ etc.} = 0$$

on n'a qu'à écrire

$$\begin{aligned} o = {} & b\xi + cv + dxv + 2ex\xi + 2fyv + gx^2v + hy^2\xi + 3kx^2\xi + 3ly^2v \\ & + dx\xi + 2gxy\xi + 2hxyv \\ & + mx^2y^2 + mx^3y + pxy^3 + qx^4 + ry^4 \\ & + 2mx^2yv + nx^3v + py^3\xi + 4qx^3\xi + 4ry^3v \\ & + 2my^2\xi + 3ny^2y\xi + 3py^2xv. \end{aligned}$$

c'est à dire changeant l'equation en analogie:

$$\frac{\xi}{v} = \frac{c + dx + 2fy + gx^2 + 2hxy + 3ly^2 + 2mx^2y}{b + dy + 2ex + 2gxy + hy^2 + 3kx^2 \text{ etc.}}$$

et supposant que $\frac{\xi}{v}$ exprime la raison $\frac{TB}{BC,\,x}$ ou $\frac{CS,y}{S\Theta}$, l'on aura *TB*, ou *SΘ*, en supposant *BC* et *SC* données. Lorsque la valeur des grandeurs determinées *b*, *c*, *d*, *e* etc. avec leur signes, fait de la valeur $\frac{\xi}{v}$ une grandeur negative, la touchante ne sera pas *CT*, qui va vers *A* commencement de l'abscisse *AB*, mais *C(T)* qui s'en éloigne. Voila tout ce qu'on en a publié jusqu'icy, aisé à entendre à celuy qui est versé en ces matieres. Mais lors qu'il y a des grandeurs irrationelles ou rompues, qui enferment x, ou y, ou toutes deux, en ne peut se servir de cette methode, que par reduction de l'equation donnée à une autre delivrée de ces grandeurs. Mais cela grossit horriblement le calcul quelques fois, et nous oblige de monter à des dimensions tres hautes, et à des equations, dont la depression souvent est tres difficile. Je ne doute pas que ces Messieurs*) que je viens de nommer ne sçachent le remede, qu'il y faut apporter, mais comme il n'est pas encor public, et que je croy qu'il est connu de peu de personnes, outre qu'il donne la derniere perfection au probleme que M. des Cartes disoit avoir le plus cherché de tous les autres de la Geometrie, à cause de son utilité, j'ay jugé à propos de le publier.

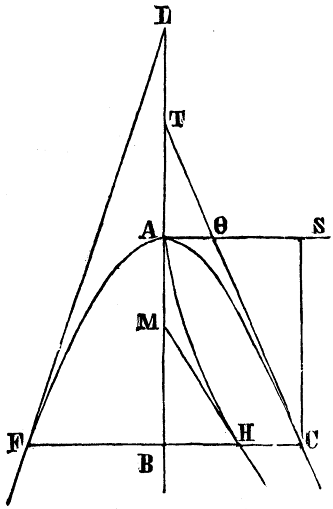
Soit une formule ou grandeur ou equation, comme par exemple celle que dessus $a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2$ etc. appellons la par abregé w et ce qui proviendra lors qu'elle sera traité comme cy dessus: sçavoir $b\xi + cv + dxv + dy\xi$ etc. sera appellé $d\overline{w}$, de meme si la formule seroit λ ou μ, le provenu serait $d\overline{\lambda}$ ou $d\overline{\mu}$ et ainsi dans toutes les autres. Soit maintenant la formule ou equation ou grandeur w egale à $\frac{\lambda}{\mu}$, je dis que $d\overline{w}$ sera égale à $\frac{\mu d\overline{\lambda} - \lambda d\overline{\mu}}{\mu^2}$. Cela suffit pour manier les fractions.

Enfin soit w égale à $\sqrt[z]{w}$, je dis que $d\overline{w}$ sera égale à $\frac{d\overline{w}}{z\sqrt[z]{w}^{\,z-1}}$ ce qui suffit pour traiter comme il faut les grandeurs irrationelles.

---

*) Leibniz hatte zu Anfang: Hudde, Slusius, et autres, geschrieben; später hat er das Uebrige, ausser Slusius, durchgestrichen.

Algorithme de l'analyse nouvelle de maximis et minimis, ou des touchantes.



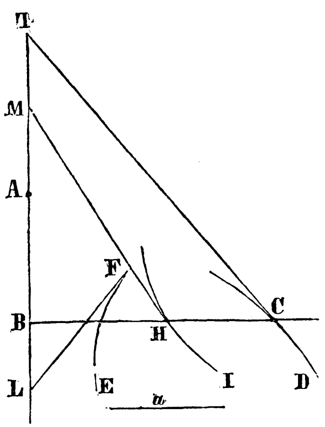
Soit $AB = x$, $BC = y$, $T\Theta C$ la touchante de la courbe AC, et la raison $\frac{TB}{BC = y}$ ou $\frac{SC = x}{S\Theta}$ sera appellée $\frac{\overline{dx}}{\overline{dy}}$. Soyent deux ou plusieurs autres courbes AF, AH, et posant $BF = v$, $BH = w$, et la droite FL touchante de la courbe AF, et MH de la courbe AH, et $\frac{LF}{FB} = \frac{\overline{dx}}{\overline{dv}}$ et $\frac{MH}{BH} = \frac{\overline{dx}}{\overline{dw}}$, je dis que $\overline{dy}$ ou $\overline{dvw}$ sera égal à $v\overline{dw} + w\overline{dv}$; estant $v = w = x$ et $y = vw = x^2$, alors pour v et w substituant x, nous aurons $\overline{dvw} = 2x\overline{dx}$.

(Tout cela reussira aussi si l'angle ABC est aigu ou obtus, item s'il est infiniment obtus, c'est à dire si TAC est une ligne droite.)

Von diesem Entwurfe ist folgende Umarbeitung vorhanden, die offenbar um dieselbe Zeit fällt:

Mons. Fermat a trouvé le premier une Methode qui pouvoit estre rendue generale, pour mener les droites qui touchent les lignes courbes analytiques. Mons. des Cartes s'y est pris d'un autre biais; mais le calcul qu'il prescrit est un peu prolixe. Mons. Hudde a trouvé un abregé merveilleux en multipliant les termes de l'equation par celles de la progression arithmetique. Il ne l'a publié que pour les equations d'une seule inconnue; quoy qu'il l'ait eu pour celles de deux indeterminées. C'est donc à Mons. Slusius que le public en est obligé; et apres cela plusieurs ont crû que cette matiere estoit épuisée. Mais toutes ces methodes publiées supposent l'equation reduite et purgée des fractions et irrationelles, je parle de celles dans les quelles les indeterminées sont comprises. Cependant j'ay trouvé moyen d'eviter ces reductions inutiles, qui font grossir le calcul horriblement et qui nous obligent de monter à des dimensions tres hautes, dont il faut chercher par apres la depression avec bien de la peine, au lieu qu'icy tout se trouve fait des le premieur coup. Cette Methode a encor plus d'avantage sur toutes celles qui ont esté puliées, que celle de Mons. Slusius a sur les autres, parce qu'autre chose est de donner un simple abregé de calcul, autre chose est retrancher les reductions et depressions. A propos de la publier, à cause de la grande étendue de cette matiere que Mons. des Cartes luy meme a jugé estre la plus utile partie de la Geometrie et dont il a souhaitté le plus de venir à bout, mais pour m'expliquer nettement et succinctement, je suis obligé d'introduire de nouveaux caracteres et de leur donner un Algorithme nouveau, c'est à dire des regles toutes particulieres pour leur addition, soustraction, multiplication, division, puissances, racines, equations.

Explication des caracteres. Soyent plusieurs courbes comme CD, FE, HJ, rapportées à un meme Axe AB par les ordonnées à un meme point B, sçavoir BC, BF, BH. Les touchantes des courbes CT, FL, HM, coupant l'axe dans les points T, L, M; le point A dans l'Axe est fixe, le point B change avec les ordonnées. Appellons AB, x; BC, y; BF, w; BH, v; et la raison TB à BC soit appellée $\overline{dx}$ à $\overline{dy}$ et la raison $\frac{LB}{BF}$ sera $\frac{\overline{dx}}{\overline{dw}}$ et la raison MB à BH sera $\frac{\overline{dx}}{\overline{dw}}$ et la raison MB à BH sera



$\overline{dx}$ à $\overline{dv}$. Si y valoit vw par exemple, nous dirions $\overline{dvw}$ au lieu de $\overline{dy}$, et ainsi dans tous les autres exemples. Soit a une droite constante, alors si y valoit a, c'est à dire si la ligne CD estoit une droite parallele à AB, $\overline{dy}$ ou $\overline{da}$ serroit 0, on égal à rien. Si la grandeur $\frac{\overline{dx}}{\overline{dw}}$ se trouvoit negative, alors FL, au lieu d'estre menée vers A, au dessus de B, sera menée en sens contraire au dessous de B.

Addition et Soustraction. Soit y egale à $v \pm w$ $(\pm)$ a, $\overline{dy}$ sera egal à $\overline{dv} \pm \overline{dw}$ $(\pm)$ 0.

Multiplication. Soit y egale à avw, $\overline{dy}$ ou $\overline{davw}$ ou $\overline{advw}$ sera $av\overline{dw} + aw\overline{dv}$.

Division. Soit y egale à $\frac{v}{aw}$, $\overline{dy}$ ou $\overline{d\frac{v}{aw}}$, ou $\frac{1}{a}\overline{d\frac{v}{w}}$ sera $\frac{w\overline{dv} - v\overline{dw}}{aw^2}$.

La regle des puissances et racines n'est qu'une meme en effect.

Puissances. y égale à w^z (supposant z un certain nombre) et $\overline{dy}$ sera $z, w^{z-1}, \overline{dw}$.

Racines ou extractions. $y = \sqrt[z]{w}$, et $\overline{dy}$ sera $\dfrac{\overline{dw}}{z\sqrt[z]{w^{\overline{z-1}}}}$.

Equations concues en termes rationaux et entiers. $a + bv + cy + tvy + ev^2 + fy^2 + gv^2y + hvy^2 + kv^3 + ly^3 + mv^2y^2 + nv^3y + pvy^3 + qv^4 + ry^4 = 0$,
supposant a, b, c, t, e etc. grandeurs connues et determinées, et nous aurons

$$\begin{array}{l} 0 = b\overline{dv} + c\overline{dy} + tv\overline{dy} + 2ev\overline{dv} + 2fy\overline{dy} + 2gv^2\overline{dy} \\ \qquad\qquad\qquad + ty\overline{dv} \qquad\qquad\qquad\qquad + 2gvy\overline{dy} \\ \quad + hy^2\overline{dv} + 3kv^2\overline{dv} + 3yl^2\overline{dy} + 2mv^2y\overline{dy} + nv^3\overline{dy} \\ \quad + 2hvy\overline{dy} \qquad\qquad\qquad\qquad + 2mvy^2\overline{dv} + 3nv^2y\overline{dv} \\ \quad + py^3\overline{dv} + 4qv^3\overline{dv} + 4ry^3\overline{dy} \\ \quad + 3pvy^2\overline{dy}. \end{array}$$

Cette regle se peut demonstrer et continuer à l'infini par les regles precedentes, car si $a + bv + cy + tvy + ev^2 + fy^2 + gv^2y$ etc. $= 0$ $\overline{da} + \overline{dby} + \overline{dcy} + t\overline{dvy} + e\overline{dv^2} + f\overline{dy^2} + g\overline{dv^2y}$ sera aussi $= 0$. Or $\overline{da} = 0$, $\overline{dbv} = b\overline{dv}$, $\overline{dcy} = c\overline{dy}$, $\overline{dvy} = v\overline{dy} + y\overline{dv}$, et $\overline{dv^2} = 2v\overline{dv}$, parceque $\overline{dv^z}$ egal à $z, v^{z-1}, \overline{dv}$, c'est à dire (au lieu de z substituant 2) $2v\overline{dv}$, et $\overline{dv^2y} = v^2\overline{dy} + 2vy\overline{dv}$, car posons $w = v^2$, et $\overline{dv^2y}$ sera $\overline{dwy}$, or $\overline{dwy} = y\overline{dw} + w\overline{dy}$ et $\overline{dw}$ ou $\overline{dv^2} = 2v\overline{dv}$, donc dans la valeur de $\overline{dvw}$ substituant au lieu de w et dw leur valeur trouvée, nous aurons $\overline{dv^2y} = v^2\overline{dy} + 2vy\overline{dv}$, comme auparavant. Cela suffit pour aller à l'infini. Si dans l'equation donnée $a + bv + cy$ etc. $= 0$ la grandeur v estoit égale à x, c'est à dire si la ligne JH estoit une droite, la quelle continuée tomboit dans le point A, à angle demydroit, alors l'equation provenante changée en analogie donneroit la regle de la Methode des Tangentes, publiée par Mons. Slusius, la quelle par consequent n'est qu'un cas ou corollaire de la methode generale.

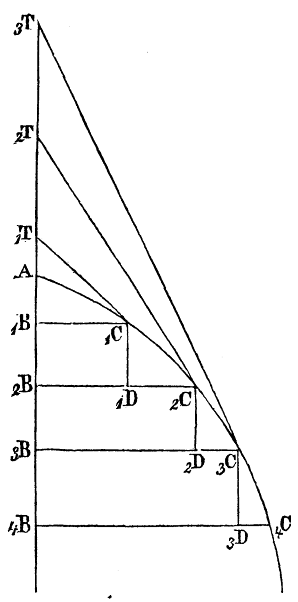
Les Equations embarassées de quelle maniere que l'on voudra par des fractions et irrationelles, pourront estre traitées de même sans aucun calcul en supposant le nominateur de la fraction ou la grandeur dont il faut tirer la racine egales à une grandeur ou lettre, que l'on traitera selon les regles susdites. Et quand il y a des grandeurs qui doivent estre multipliées l'une par l'autre, on n'a pas besoin de faire cette multiplication effectivement, ce qui épargne encor beaucoup de travail. Un seul exemple suffira:

(Das Folgende scheint später hinzugefügt zu sein.)

Au reste cette methode sert aussi lors que les Courbes ne sont pas purement analytiques, et lors même leur nature n'est pas expliquée par des telles ordonnées, et de plus elle donne une facilité merveilleuse pour les constructions geometriques. La veritable raison d'un abregé si admirable, et qui nous fait eviter toutes les reductions des fractions et irrationelles est que l'on peut tousjours obtenir par les regles precedentes que les lettres $\overline{dy}$, $\overline{dv}$, $\overline{dw}$, et semblables se trouvent hors du nominateur de la fraction, et hors du vincule de la racine. —

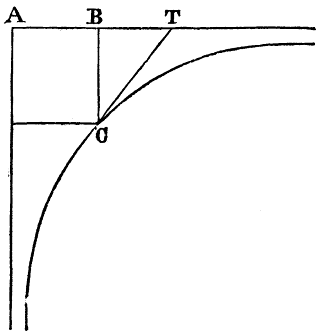
Beilage VI.

Elementa calculi novi pro differentiis et summis, tangentibus et quadraturis, maximis et minimis, dimensionibus linearum, superficierum, solidorum, aliisque communem calculum transcendentibus.



Sit linea CC cujus axis AB, ordinatae ad axem normales BC, quae vocentur y, abscissae ex axe AB, quae vocentur x. Jam CD differentiae abscissarum vocentur dx, quales sunt ${}_1C_1D$, ${}_2C_2D$, ${}_3C_3D$ etc. At vero rectae ${}_1D_2C$, ${}_2D_2C$, ${}_3D_4C$ (differentiae scilicet ordinatarum BD) vocentur dy. Si jam ponuntur ipsae istae dx et dy infinite parvae, seu quando puncta curvae distantiam habere intelliguntur quavis data minorem, id est si istae ${}_2D_2C$, ${}_3D_3C$ etc. considerentur ut incrementa momentanea lineae BC inter descendendum per AB continue crescentis, tunc patet rectam duo illa puncta jungentem, ut ${}_2C_1C$ (quae est elementum curvae seu latus polygoni infinitanguli quod pro curva habemus) productam donec axi occurrat in ${}_1T$, fore ipsam curvae tangentem, et erit ${}_1T_1B$ (intervallum inter ordinatam et tangentem in axe sumtum) ad ${}_1B_1C$ ordinatam, ut ${}_1C_1D$ ad ${}_1D_2C$, seu si ${}_1T_1B$ vel ${}_2T_2B$ etc. generaliter vocetur t, erit

$t : y :: dx : dy$. Et itaque invenire differentias serierum est invenire tangentes. Ex. gr. quaeritur tangens Hyperbolae cum sit y aequ. $\frac{aa}{x}$



(posita x seu AB abscissa ex asymptota, et a latere potentiae seu rectanguli ABC) erit dy aequ. $-\frac{aa}{xx}dx$, ut mox patebit cum modum calculandi ostendemus, ergo $dx : dy$ seu $t : y$ erit $:: - xx : aa :: - x : \frac{aa}{x}$ $:: - x : y$, ergo t aequ. $- x$, hoc est in Hyperbola erit BT aequ. AB, sed ob signum $-$ non versus A, sed in contrarias partes sumenda. Porro differentiae sunt reciprocae summis, ita ordinatae sunt suarum differentiarum summae, sic ${}_4B_4C$ est summa omnium differentiarum, ut ${}_3D_4C$, ${}_2D_3C$ etc. usque ad A, etiamsi numero essent infinitae. Quod ita designo $\int dy$ aequ. y. Aream autem figurae designo per summam rectangulorum ex ordinatis in differentias abscissarum, ut ${}_1B_1D + {}_2B_2D + {}_3B_3D$ etc. Nam exigua triangula ${}_1C_1D_2C$, ${}_2C_2D_3C$ etc. cum sint infinite parva respectu dictorum rectangulorum, omitti possunt impune, itaque aream figurae calculo meo ita designo $\int ydx$, seu summam ex rectangulis cujusque y ducti in respondens sibi dx, ubi si dx ponantur se aequales, habetur Methodus indivisibilium Cavalerii. Nos autem altius assurgentes aream figurae inveniemus, si inveniamus figuram ejus summatricem sive quadratricem, cujus scilicet ordinatae sint ad ordinatas figurae datae ut summae ad differentias; exempli causa, sit figurae quadrandae datae curva EE*), ejusque ordinatae EB, quas vocabimus e, sint differentiis ordinatarum BC seu ipsis dy proportionales, seu sit ${}_1B_1E : {}_2B_2E :: {}_1D_2C : {}_2D_3C$, et ita porro, vel sit ut A_1B ad ${}_1B_1C$ sive ut ${}_1C_1D$ ad ${}_1D_2C$, sive ut dx ad dy, ita constans seu semper permanens recta a ad ${}_1B_1E$ sive e, fiet

*) Im Manuscript fehlt die Figur. Leibniz spricht offenbar von der logarithmischen Curve.

$dx : dy :: a : e$ seu edx aequ. ady. Ergo $\int edx$ aequ. $\int ady$. Est vero edx idem quod e in dx respondentem, ut rectang. ${}_3B_4E$, quod fit ex ${}_3B_3E$ in ${}_3B_4B$, ergo $\int edx$ erit summa talium rectangulorum ${}_3B_4E + {}_3B_2E + {}_2B_1E$ etc. quae summa est ipsa area figurae A_4B_4EA positis ipsis dx seu ordinatarum e sive BE intervallis infinite parvis. Porro ady est rectang. ex dy ut ${}_3D_4C$ in constantem a, et summa horum rectangulorum, nempe $\int ady$ sive ${}_3D_4C$ in $a + {}_2D_3C$ in $a + {}_1D_2C$ in a etc. idem est quod ${}_3D_4C + {}_2D_3C + {}_1D_2C$ etc. in a, hoc est idem quod ${}_4B_4C$ in a, ergo $\int ady$ aequ. $a\int dy$ seu ay. Habemus ergo $\int edx$ aequ. ay, hoc est area A_4B_4EA aequabitur rectangulo sub ipsa ${}_4B_4C$ et constante a, et generaliter area $ABEA$ aequ. BC in a. Tantum ergo ad quadraturas opus est data linea EE invenire lineam CC summatricem, et quidem semper calculo inveniri potest, an talis linea haberi possit communi Geometria, an vero sit Transcendens, quae calculo Algebraico exprimi non potest, de quo alibi. Ex his autem jam infinita pulchra theoremata partim ab aliis maxime Anglis Batavisque inventa, partim non inventa duci possent et quidem solo calculo, nullo propemodum imaginationis labore. Triangulum autem ad lineam, quale est ${}_1C_1D_2C$, voco characteristicum lineae, quia ejus ope potissima inveniri possunt circa lineam theoremata, quae videntur admirabilia, ut ejus dimensio, superficies, solidaque rotatione genita, centra gravitatis, quia ${}_1C_2C$ aequ. $\sqrt{dx.dx + dy.dy}$. Hinc statim habetur modus inveniendi curvae dimensionem ope alicujus quadraturae, ex. gr. in parabola, si sit y aequ. $\frac{xx}{2a}$, erit dy aequ. $\frac{x\,dx}{a}$, unde ${}_1C_2C$ erit $\frac{dx}{a}\sqrt{aa+xx}$, est ergo ${}_1C_2C$ ad dx ut ordinata Hyperbolae $\sqrt{aa + xx}$ ad constantem a, seu $\frac{1}{a}\int dx\sqrt{aa + xx}$, recta aequalis curvae parabolae, pendet ex quadratura Hyperbolae, ut jam ab aliis inventum habetur. Et ita calculo exprimuntur inventa pulcherrima Hugenii, Wallisii, Heuratii et Neilii. Supra dixi esse $t : y :: dx : dy$. Ergo erit tdy aequ. ydx, ergo $\int t\,dy$ aequ. $\int ydx$. Haec aequatio in lineis enuntiata dat theorema elegans Gregorii; nempe sit angulus BAF rectus, et sint AF aequales ipsis BC, et FG parallelae ipsi AB et aequales ipsis BT, nempe ${}_1F_1G$ ipsi ${}_1B_1T$, erit $\int tdy$ seu summa rectangulorum ex t, verb. gr. ${}_4F_4G$ (seu ${}_4B_4T$) in dy seu ${}_3F_4F$ (seu ${}_3D_4C$) hoc est rectang. ${}_4F_8G + {}_3F_2G + {}_2F_1G$ etc. seu area figurae A_4F_4GA aequalis ipsi $\int ydx$ seu figurae A_4B_4CA et generaliter $AFGA$ aequ. $ABCA$. Vicissim alia, quae ex figurae inspectione statim patent, ex calculo etiam facile deducuntur, ex. gr. quod in trilineo, ut $ABCA$, figura $ABCA$ cum figura complementali $AFCA$ aequatur rectangulo $ABCF$, nam calculus mox ostendet, quod $\int y\,dx + \int x\,dy$ aequ. xy. Si quis quaerit solidum rotatione circa axem factum, tantum quaerere potest $\int \overline{yy\,dx}$, pro solido circa basin $\int \overline{xx\,dy}$, pro momento ex vertice $\int \overline{yx\,dx}$, quae serviunt ad invenienda centra gravitatis figurarum et exprimunt ungulam Gregorii a S. Vincentio et quae deinde Pascalius, Wallisius, Lalovera, aliique circa haec invenere. Nam et si quis quaerat centra linearum, et superficies earum rotatione generatas, ex. gr. superficiem lineae AC circa AB rotatae, tantum quaerere debet $\int \overline{y\sqrt{dx\,dx + dy\,dy}}$ seu summa omnium PC ad axem applicatarum in punctis respondentibus B, ita ${}_2P_2C$ applicabitur axi AB normaliter ad ${}_2B$, unde fit figura, cujus area est illa ipsa summa. Itaque res statim reducet ad quadraturam figurae alicujus planae, si pro y et dy substituat valorem ex natura ordinatarum et tangentium curvae. Ita pro parabola sit y aequ. $\sqrt{2ax}$, erit dy aequ. $\frac{adx}{y}$, ut mox patebit, ergo prodibit $\int \overline{y\sqrt{dx\,dx + \frac{aa}{yy}dx\,dx}}$ seu

$\int \overline{dx\sqrt{yy+aa}}$ seu $\int \overline{dx\sqrt{2ax+aa}}$, quod pendet ex quadratura parabolae (est enim omnium $\sqrt{2ax+aa}$ seu PC locus ad parabolam, posito AC esse parabolam, AB ejus axem, licet tum deberet figura immutari et curva axi concavitatem obvertere) quae cum habeatur ex communi Geometria, habebitur et circulus superficiei conoeidis parabolici aequalis; quae prolixe deducere non est hujus loci. Haec autem quae magna videri possunt, sunt tantum facillima calculi hujus corollaria. Multa enim majora hinc sequuntur, nec ullum facile problema sive in Geometria pura, sive ad Mechanicen applicata occurret, quod ejus vim plane effugiat.

Jam ipsius calculi Elementa exponamus.

Fundamentum calculi: Differentiae et summae sibi reciprocae sunt, hoc est summa differentiarum seriei est seriei terminus, et differentia summarum seriei est ipse seriei terminus, quorum illud ita enuntio: $\int dx$ aequ. x; hoc ita: $d\int x$ aequ. x.

Sit series differentiae		1	2	3	4	5	dx
series ipsa	0	1	3	6	10	15	x
seriei summa	0	1	4	10	20	35	$\int x$.

Jam Termini seriei sunt summae differentiarum seu x aequ. $\int dx$, ita 3 aequ. $1+2$, et 6 aequ. $1+2+3$ etc. contra differentiae summarum seriei sunt ipsi seriei termini, seu $d\int x$ aequ. x, ita 3 est differentia inter 1 et 4, et 6 inter 4 et 10. da aequ. 0, posito a esse quantitatem constantem, quia $a - a$ est 0.

Additio et subtractio. Differentia vel summa seriei, cujus terminus est conflatus per additionem vel subtractionem terminorum aliarum serierum, eodem modo ex harum serierum differentiis vel summis conflatur, seu $x + y - v$ aequ. $\int \overline{dx + dy - dv}$, $\int \overline{x + y - v}$ aequ. $\int x + \int y - \int v$. Res patet inspicienti, si quis tres series et cujusque summas et differentias exponat, et tali modo respondentes respondentibus inter se jungat. Multiplicatio simplex. $\overline{dxy}$ aequ. $xdy + ydx$ seu xy aequ. $\int xdy + \int ydx$. Est id ipsum quod supra diximus, figuram cum suo complemento aequari rectangulo circumscripto. Ex calculo ita demonstratur: $\overline{dxy}$ idem est quod differentia duorum xy sibi propinquorum quorum unum esto xy, alterum $x + dx$ in $y + dy$, fiet: $\overline{dxy}$ aequ. $\overline{x + dx}$ in $\overline{y + dy} - xy$ seu $+ xdy + ydx + dxdy$ et omissa quantitate $dxdy$, quae infinite parva est respectu reliquorum, posito dx et dy esse infinite parvas (cum scilicet per seriei terminum lineae continue per minima crescentes vel decrescentes intelliguntur) prodibit $xdy + ydx$, signa tamen variantur, prout x et y simul crescunt, vel uno crescente alterum decrescit, quod notandum. Divisio simplex. $d\frac{y}{x}$ aequ. $\frac{xdy - ydx}{xx}$, nam $d\frac{y}{x}$ aequ. $\frac{y + ay}{x + dx} - \frac{y}{x}$ seu $\frac{xdy - ydx}{xx + xdx}$, ubi pro $xx + xdx$ scribendo xx, quia omitti potest xdx tanquam infinite parvum respectu ipsius xx, fit: $\frac{xdy - ydx}{xx}$, et quidem, si esset y aequ. aa, foret dy aequ. 0, unde fieret $-\frac{aa\,dx}{xx}$, quo valore paulo ante pro tangente Hyperbolae usi sumus. Ex his jam facile quivis calculo ducere poterit Multiplicationem aut Divisionem compositam; ita $\overline{dxyv}$ erit $xydv + xvdy + yvdx$; ita $d\frac{y}{vz}$ erit $\frac{zv\,dy - yv\,dz - yz\,dv}{vv\,.\,zz}$, quod demonstratur ex praecedenti, nam $d\frac{y}{x}$ aequ. $\frac{x\,dy - y\,dx}{xx}$, ubi pro ponendo zv, et pro dx seu $\overline{dzv}$ ponendo $zdv + vdz$ per superiora, habebitur quod diximus. Sequuntur Potentiae: dx^2 aequ. $2xdx$, et dx^3 aequ. $3xxdx$. Nam ponendo y aequ. x, et v aequ. x, pro dxx poterit scribi $\overline{dxy}$, hoc est (per superiora) $xdy + ydx$ seu (si x aequ. y, et per consequens dx aequ. dy) $2xdx$. Similiter pro dx^3 scribetur $\overline{dxyv}$, hoc est (per superiora) $xydv + xvdy + yvdx$ seu (y et v ponendo et pro dy et dv ponendo dx) $3xxdx$. Q. E. D. Eodem modo in genere $d(x^e)$ erit aequ. $e\,.\,x^{e-1}dx$, quemadmodum ex dictis non difficulter demonstratur. Hinc porro $d\frac{1}{x^h}$ aequ. $-\frac{h\,dx}{x^{\overline{h+1}}}$. Nam si $\frac{1}{x^h}$ aequ. x^e, erit e aequ. $-h$, $x^{\overline{e-1}}$ aequ. $\frac{1}{x^{\overline{h+1}}}$, ut notum est naturas exponentium in progressione geometrica intelligenti. Atque hoc pro fractis. Idem procedit pro irrationalibus seu Radicibus: $d(\sqrt[r]{x^h})$ aequ. $dx^{h:r}$ (per $h:r$ intelligo $\frac{h}{r}$ seu h divis. per r) seu $d^e(x^e)$ (posito e aequ. $\frac{h}{r}$) seu $e.x^{\overline{e-1}}\,dx$ per supra dicta, seu (pro e reddendo $h:r$ et pro $e-1$ ponendo $\overline{h-r:r}$) $\frac{h}{r}\,.\,x^{\overline{h-r:r}}\,.\,dx$, quod proinde erit aequ. $d(\sqrt[r]{x^h})$. Ex his vicissim fiet $\int(x^e\,.\,dx)$ aequ. $\frac{x^{\overline{e+1}}}{e+1}$ et $\int(\frac{1}{x^e}\,.\,dx)$ aequ. $-\frac{1}{e-1\,.\,x^{\overline{e-1}}}$ et $\int(\sqrt[r]{x^h}\,.\,dx)$ aequ. $\frac{r}{h+r}\sqrt[r]{(x^{\overline{h+r}})}$. Atque haec sunt calculi differentialis vel summatorii Elementa, secundum quem etiam formulae maxime compositae tractari possunt, tantum pro fracta vel irrationali quantitate, vel alia quaevis, modo ea indefinita, hoc est x vel y, vel alia terminum alicujus seriei in genere exprimens, ingrediatur.